Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 2

Artikel: Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung
Autor: Alzer, Horst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42411

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Besicovitch A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers. J. London Math. Soc. *15*, 3–6 (1940).
[2] Herstein I. N.: Topics in Algebra, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York 1975.
[3] Niven I.: Irrational Numbers, Carus Mathematical Monographs of the MAA, no 11, 1956.
[4] Patruno G. N.: Sums of irrational square roots are irrational. Mathematics Magazine *61*, 44–45 (1988).
[5] Roth R. L.: On extensions of Q by square roots. Amer. Math. Monthly *78*, 392–393 (1971).

ANMERKUNGEN

[1*] Siehe hierzu [1]–[5].

 0013-6018/90/020051-03$1.50 + 0.20/0

Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung

Im Jahre 1968 veröffentlichte L. Gerber [1] folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung der berühmten Bernoullischen Ungleichung:
Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen k und für alle reellen Zahlen a und x mit $-1 < x \neq 0$ gilt:

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[(1+x)^a - \sum_{p=0}^{k} \binom{a}{p} x^p \right] \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann verschwindet, wenn $a \in \{0, 1, \ldots, k\}$.
Für $k = 1$ erhalten wir die Ungleichung von Bernoulli. Der von Gerber publizierte Induktionsbeweis ist kurz, jedoch recht kompliziert. Das Ziel dieser Note ist es, einen sehr einfachen Beweis für Gerbers Ungleichung anzugeben.
Wir definieren

$$f(x) = f(k, a; x) = (1+x)^a - \sum_{p=0}^{k} \binom{a}{p} x^p.$$

Differentiation nach x ergibt für $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(x) = n! \left[\binom{a}{n} (1+x)^{a-n} - \sum_{p=n}^{k} \binom{a}{p} \binom{p}{n} x^{p-n} \right]$$

und es folgt

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, k,$$

sowie

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)!\binom{a}{k+1}(1+x)^{a-k-1}.$$

Der Satz von Taylor liefert somit für f die Darstellung

$$f(x) = \binom{a}{k+1}(1+cx)^{a-k-1}x^{k+1}, \quad 0 < c < 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\binom{a}{k+1}x^{k+1}\left[(1+x)^a - \sum_{p=0}^{k}\binom{a}{p}x^p\right] = \binom{a}{k+1}^2 x^{2(k+1)}(1+cx)^{a-k-1} \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann gleich Null ist, wenn $\binom{a}{k+1} = 0.$

Horst Alzer
University of the Witwatersrand, Johannesburg

LITERATUR

1 Gerber L.: An extension of Bernoulli's inequality. Amer. Math. Monthly *75*, 875–876 (1968).

 0013-6018/90/020053-02$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 1005. Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) strebt mit wachsendem n gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer

R. Wyss, Flumenthal

Lösung (Bearbeitung der Redaktion). Es sei ε der Rundungsfehler (Maschinenfehler) von e bei der Berechnung der x_n auf dem Computer. Diese erfolgt also gemäss

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = e + \varepsilon - n x_{n-1}.$$