

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 2

Artikel: Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung
Autor: Alzer, Horst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-42411>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Besicovitch A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers. *J. London Math. Soc.* 15, 3–6 (1940).
 [2] Herstein I. N.: *Topics in Algebra*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York 1975.
 [3] Niven I.: *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monographs of the MAA, no 11, 1956.
 [4] Patrino G. N.: Sums of irrational square roots are irrational. *Mathematics Magazine* 61, 44–45 (1988).
 [5] Roth R. L.: On extensions of \mathcal{Q} by square roots. *Amer. Math. Monthly* 78, 392–393 (1971).

ANMERKUNGEN

[1*] Siehe hierzu [1]–[5].

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/020051-03\$1.50 + 0.20/0

Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung

Im Jahre 1968 veröffentlichte L. Gerber [1] folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung der berühmten Bernoullischen Ungleichung:

Für alle nicht-negativen ganzen Zahlen k und für alle reellen Zahlen a und x mit $-1 < x \neq 0$ gilt:

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[(1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p \right] \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann verschwindet, wenn $a \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Für $k=1$ erhalten wir die Ungleichung von Bernoulli. Der von Gerber publizierte Induktionsbeweis ist kurz, jedoch recht kompliziert. Das Ziel dieser Note ist es, einen sehr einfachen Beweis für Gerbers Ungleichung anzugeben.

Wir definieren

$$f(x) = f(k, a; x) = (1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p.$$

Differentiation nach x ergibt für $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(x) = n! \left[\binom{a}{n} (1+x)^{a-n} - \sum_{p=n}^k \binom{a}{p} \binom{p}{n} x^{p-n} \right]$$

und es folgt

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

sowie

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \binom{a}{k+1} (1+x)^{a-k-1}.$$

Der Satz von Taylor liefert somit für f die Darstellung

$$f(x) = \binom{a}{k+1} (1+cx)^{a-k-1} x^{k+1}, \quad 0 < c < 1.$$

Schließlich erhalten wir

$$\binom{a}{k+1} x^{k+1} \left[(1+x)^a - \sum_{p=0}^k \binom{a}{p} x^p \right] = \binom{a}{k+1}^2 x^{2(k+1)} (1+cx)^{a-k-1} \geq 0,$$

wobei der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck genau dann gleich Null ist, wenn

$$\binom{a}{k+1} = 0.$$

Horst Alzer
University of the Witwatersrand, Johannesburg

LITERATUR

1 Gerber L.: An extension of Bernoulli's inequality. Amer. Math. Monthly 75, 875–876 (1968).

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/020053-02\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 1005. Man beweise: Die durch

$$x_1 = 1, \quad x_n = e - n \cdot x_{n-1} \quad (e \text{ ist die Eulersche Zahl})$$

rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) strebt mit wachsendem n gegen Null und divergiert (in dieser Form) bei der Berechnung auf jedem Computer

R. Wyss, Flumenthal

Lösung (Bearbeitung der Redaktion). Es sei ε der Rundungsfehler (Maschinenfehler) von e bei der Berechnung der x_n auf dem Computer. Diese erfolgt also gemäss

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = e + \varepsilon - n x_{n-1}.$$