Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 45 (1990)

Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilung

Kleine Mitteilung

Ein einfacher geometrischer Beweis für die Determinantenungleichung von O. Szasz

Es sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische und positiv-definite $n \times n$-Matrix und P_k sei das Produkt aller ihrer $k \times k$-Hauptminoren $(1 \leqq k \leqq n)$. Dann gilt die Szasz'sche Verfeinerung der Hadamard'schen Determinantenungleichung (siehe etwa [1], [2], [3], [4]):

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = P_1 \geq \ldots \geq P_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \ldots \geq P_n = \det A .$$

Man kann im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ so wählen, dass die Gram'sche Matrix

$$G = [(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$$

mit A übereinstimmt. Die Zahl $(\det G)^{1/2}$ kann interpretiert werden als Volumen des Parallelotops $V = V(e_1, \ldots, e_n)$ [5]. Es sei weiter I eine beliebige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und V_I das von den Vektoren e_i, $i \in I$ aufgespannte Parallelotop. Wir bezeichnen mit v_k das Produkt der Volumina aller k-dimensionalen Parallelotope V_I. Dann nimmt die Szasz'sche Ungleichung die Form

$$\prod_{i=1}^{n} \| e_i \| = v_1 \geq \ldots \geq v_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \ldots \geq v_n = \operatorname{vol} V$$

an.
Der angestrebte geometrische Beweis dieser Ungleichung beruht nun auf dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: *Das Volumen eines Parallelotops ist grösser oder gleich dem Produkt aller seiner Höhen. Gleichheit besteht genau dann, wenn das Parallelotop orthogonal ist.*

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion nach der Dimension des Parallelotopes. Die Induktionsverankerung ist trivial ($n = 2$). Der Induktionsschritt von $n - 1$ auf n kann wie folgt vollzogen werden.
Es sei $V = V(e_1, \ldots, e_n)$ ein Parallelotop mit den Höhen h_i $(1 \leq i \leq n)$. Dann gilt

$$h_i = \operatorname{vol} V / \operatorname{vol} V_i = \min \{ \| e_i - f \| : f \in L(V_i) \} .$$

wobei

$$V_i = V_{\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}}$$

und $L(V_i)$ der von V_i aufgespannte Teilraum ist $(1 \leq i \leq n)$.

Nach der Induktionsvoraussetzung hat man für $2 \leq i \leq n$

$$\operatorname{vol} V_1 \geq h_2' \dots h_n',$$

mit

$$h_i' = \min\{\| e_i - f \| : f \in L(V_i')\}, \quad V_i' = V_{\{2,\dots,n\}\setminus\{i\}}.$$

Wegen der Inklusion

$$V_i' \subset V_i \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

besteht die Ungleichung

$$h_i' \geq h_i \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n.$$

Folglich ist

$$\operatorname{vol} V = h_1 \operatorname{vol} V_1 \geq h_1 h_2' \dots h_n' \geq h_1 h_2 \dots h_n.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{vol} V = h_1 h_2 \dots h_n$$

besteht nur, wenn

$$\operatorname{vol} V_1 = h_2' \dots h_n' \quad \text{und} \quad h_i = h_i' \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

ist. Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt aber

$$\operatorname{vol} V_1 = h_2' \dots h_n'$$

nur dann, wenn $(e_i, e_j) = 0$ für $2 \leqq i, j \leq n$. Dann folgen aus den Beziehungen

$$h_i = h_i' \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

die Gleichungen $h_i = h_i' = \| e_i \|$, $2 \leq i \leq n$ (weil e_i und $L(V')$ orthogonal sind), also $(e_1, e_i) = 0$, $2 \leq i \leq n$ (andernfalls sind e_i und $L(V_i)$ nicht-orthogonal und $h_i < \| e_i \|$). Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.
Gemäss Hilfssatz ist

$$\operatorname{vol} V \geq h_1 \dots h_n = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{vol} V / \operatorname{vol} V_i,$$

also gelten auch die Ungleichungen

$$\prod_{i=1}^{n} \operatorname{vol} V_i \geq (\operatorname{vol} V)^{n-1}$$

und

$$v_n = \mathrm{vol}\, V \leq \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{vol}\, V_i)^{1/(n-1)} = v_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges k-dimensionales Parallelotop V_I die Ungleichung

$$\mathrm{vol}\, V_I \leq \left(\prod_{i \in I} \mathrm{vol}\, V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)}.$$

Daraus schliesst man jetzt, dass

$$v_k = \prod_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\} \\ |I| = k}} \mathrm{vol}\, V_I \leq \prod_I \left(\prod_{i \in I} \mathrm{vol}\, V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)} = \left(\prod_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ |J| = k-1}} \mathrm{vol}\, V_j\right)^{\frac{n-k+1}{k-1}}$$

$$= v_{k-1}^{\binom{n-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-2}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

und dies beweist die Ungleichung von Szasz.

S. B. Gaschkov,
Fakultät für Mechanik und Mathematik, Universität Moskau

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer-Semester 1988 während eines Gastaufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Zürich verfasst.

LITERATUR

1 Szasz O.: Über eine Verallgemeinerung des Hadamard'schen Determinantensatzes. Monatsschrift f. Math. und Phys. *28*, 253–257 (1917).
2 Beckenbach E., Bellmann E.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.
3 Mirsky L.: On a Generalization of Hadamard's Determinantal Inequality due to Szasz. Archiv der Math. *8*, 274–275 (1957).
4 Marcus M., H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Ally and Bacon, Boston, 1964.
5 Hadwiger H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

 0013-6018/90/060153-03$1.50 + 0.20/0

Elementarmathematik

Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck

Wir betrachten ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c. Es sei E irgend ein Punkt der Ebene, und k_1, k_2, k_3 seien drei aufeinander abgestimmte Zahlen, welche die Gleichung

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3 \tag{1}$$