

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1990)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilung

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 26.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilung

### Ein einfacher geometrischer Beweis für die Determinantenungleichung von O. Szasz

Es sei  $A = (a_{ii})$  eine symmetrische und positiv-definite  $n \times n$ -Matrix und  $P_k$  sei das Produkt aller ihrer  $k \times k$ -Hauptminoren ( $1 \leq k \leq n$ ). Dann gilt die Szasz'sche Verfeinerung der Hadamard'schen Determinantenungleichung (siehe etwa [1], [2], [3], [4]):

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} = P_1 \geq \dots \geq P_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \dots \geq P_n = \det A.$$

Man kann im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E^n$  eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  so wählen, dass die Gram'sche Matrix

$$G = [(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$$

mit  $A$  übereinstimmt. Die Zahl  $(\det G)^{1/2}$  kann interpretiert werden als Volumen des Parallelotops  $V = V(e_1, \dots, e_n)$  [5]. Es sei weiter  $I$  eine beliebige Teilmenge von  $\{1, 2, \dots, n\}$  und  $V_I$  das von den Vektoren  $e_i, i \in I$  aufgespannte Parallelotop. Wir bezeichnen mit  $v_k$  das Produkt der Volumina aller  $k$ -dimensionalen Parallelotope  $V_I$ . Dann nimmt die Szasz'sche Ungleichung die Form

$$\prod_{i=1}^n \|e_i\| = v_1 \geq \dots \geq v_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \dots \geq v_n = \text{vol } V$$

an.

Der angestrebte geometrische Beweis dieser Ungleichung beruht nun auf dem folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz:** *Das Volumen eines Parallelotops ist grösser oder gleich dem Produkt aller seiner Höhen. Gleichheit besteht genau dann, wenn das Parallelotop orthogonal ist.*

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion nach der Dimension des Parallelotopes. Die Induktionsverankerung ist trivial ( $n = 2$ ). Der Induktionsschritt von  $n - 1$  auf  $n$  kann wie folgt vollzogen werden.

Es sei  $V = V(e_1, \dots, e_n)$  ein Parallelotop mit den Höhen  $h_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Dann gilt

$$h_i = \text{vol } V / \text{vol } V_i = \min \{ \|e_i - f\| : f \in L(V_i) \}.$$

wobei

$$V_i = V_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}}$$

und  $L(V_i)$  der von  $V_i$  aufgespannte Teilraum ist ( $1 \leq i \leq n$ ).

Nach der Induktionsvoraussetzung hat man für  $2 \leq i \leq n$

$$\text{vol } V_1 \geq h'_2 \dots h'_n,$$

mit

$$h'_i = \min \{ \|e_i - f\| : f \in L(V'_i) \}, \quad V'_i = V_{\{2, \dots, n\} \setminus \{i\}}.$$

Wegen der Inklusion

$$V'_i \subset V_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n$$

besteht die Ungleichung

$$h'_i \geq h_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n.$$

Folglich ist

$$\text{vol } V = h_1 \text{vol } V_1 \geq h_1 h'_2 \dots h'_n \geq h_1 h_2 \dots h_n.$$

Die Gleichung

$$\text{vol } V = h_1 h_2 \dots h_n$$

besteht nur, wenn

$$\text{vol } V_1 = h'_2 \dots h'_n \quad \text{und} \quad h_i = h'_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n$$

ist. Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt aber

$$\text{vol } V_1 = h_2 \dots h_n$$

nur dann, wenn  $(e_i, e_j) = 0$  für  $2 \leq i, j \leq n$ . Dann folgen aus den Beziehungen

$$h_i = h'_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n$$

die Gleichungen  $h_i = h'_i = \|e_i\|$ ,  $2 \leq i \leq n$  (weil  $e_i$  und  $L(V')$  orthogonal sind), also  $(e_1, e_i) = 0$ ,  $2 \leq i \leq n$  (andernfalls sind  $e_i$  und  $L(V_i)$  nicht-orthogonal und  $h_i < \|e_i\|$ ). Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.

Gemäss Hilfssatz ist

$$\text{vol } V \geq h_1 \dots h_n = \prod_{i=1}^n \text{vol } V / \text{vol } V_i,$$

also gelten auch die Ungleichungen

$$\prod_{i=1}^n \text{vol } V_i \geq (\text{vol } V)^{n-1}$$

und

$$v_n = \text{vol } V \leq \prod_{i=1}^n (\text{vol } V_i)^{1/(n-1)} = v_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges  $k$ -dimensionales Parallelotop  $V_I$  die Ungleichung

$$\text{vol } V_I \leq \left( \prod_{i \in I} \text{vol } V_{I \setminus \{i\}} \right)^{1/(k-1)}.$$

Daraus schliesst man jetzt, dass

$$\begin{aligned} v_k &= \prod_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \text{vol } V_I \leq \prod_I \left( \prod_{i \in I} \text{vol } V_{I \setminus \{i\}} \right)^{1/(k-1)} = \left( \prod_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k-1}} \text{vol } V_J \right)^{\frac{n-k+1}{k-1}} \\ &= v_{k-1}^{(n-k+1)/(k-1)}, \quad 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

und dies beweist die Ungleichung von Szasz.

S. B. Gaschkov,  
Fakultät für Mechanik und Mathematik, Universität Moskau

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer-Semester 1988 während eines Gastaufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Zürich verfasst.

#### LITERATUR

- 1 Szasz O.: Über eine Verallgemeinerung des Hadamard'schen Determinantensatzes. Monatschrift f. Math. und Phys. 28, 253–257 (1917).
- 2 Beckenbach E., Bellmann E.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.
- 3 Mirsky L.: On a Generalization of Hadamard's Determinantal Inequality due to Szasz. Archiv der Math. 8, 274–275 (1957).
- 4 Marcus M., H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Allyn and Bacon, Boston, 1964.
- 5 Hadwiger H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/90/060153-03\$1.50 + 0.20/0

## Elementarmathematik

### Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck

Wir betrachten ein Dreieck  $ABC$  mit den Seitenlängen  $a, b, c$ . Es sei  $E$  irgend ein Punkt der Ebene, und  $k_1, k_2, k_3$  seien drei aufeinander abgestimmte Zahlen, welche die Gleichung

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3 \tag{1}$$