

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1991)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Selbstreproduzierende Muster  
**Autor:** Läuchli, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43266>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 46

Nr. 2

Seiten 33–64

Basel, März 1991

## Selbstreproduzierende Muster

**Zusammenfassung.** Auf einem Quadratgitter wird die Entwicklung von 0-1-Mustern nach einer einfachen Spielregel verfolgt, wobei sich eine merkwürdige Reproduktionseigenschaft zeigt. Aus der Diskussion dieser Erscheinung ergeben sich einige Querverbindungen zu anderen mathematischen Themen.

**Abstract.** The development of 0-1-patterns on a square grid, obeying a simple rule is discussed. As a result, a self-reproducing property can be observed. Some relations to other mathematical subjects are set out.

### 1. Einleitung

Vor vielen Jahren las ich – wahrscheinlich in einer Kolumne von M. Gardner im Scientific American – eine Notiz über ein «Spiel», das sich, ähnlich wie Conway's «Game of Life», auf einem Quadratgitter abwickelt. Der momentane Zustand ist wie dort durch eine binäre Belegung in jedem Gitterpunkt, z. B. mit 0 oder 1, definiert. Die Regeln sind aber viel einfacher als bei Conway:

*Im Folgezustand erhalten genau diejenigen Punkte eine 1, welche im aktuellen Zustand eine ungerade Anzahl Nachbarn mit 1 haben.*

Dabei gilt die Konvention, dass jeder Gitterpunkt 4 Nachbarpunkte besitzt. (Im Game of Life: 8 Nachbarpunkte. Siehe Berlekamp, Conway, Guy [1], oder Jacobs [4]). Ein einfaches Beispiel ist in Abb. 1 dargestellt. Die mit 1 belegten Punkte sind hervorgehoben. In der erwähnten Notiz wurde nun festgestellt, dass ein beliebiges Anfangsmuster nach einer gewissen Anzahl von Schritten in vier identischen Kopien reproduziert wird.

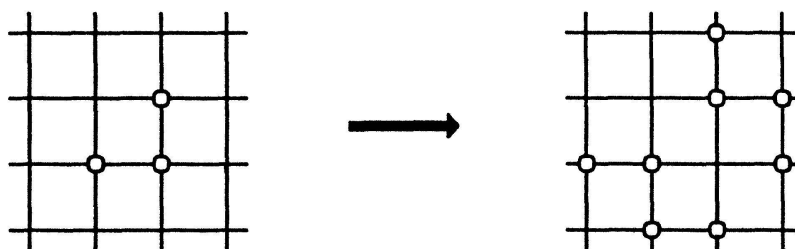


Abb. 1. Beispiel für einen Spielschritt

Nach meiner Erinnerung blieb aber diese Behauptung dort unbewiesen. Falls ein Leser die genaue Quelle kennt, bin ich froh um einen entsprechenden Hinweis. Die hübsche Idee liefert übrigens eine dankbare Übungsaufgabe für ein Dialogprogramm, welche ich häufig in Anfängerkursen im Programmieren gestellt habe.

Als ich mich in den letzten Jahren wieder mit dem Problem befasste, sah ich, dass der Beweis für die Reproduktionseigenschaft fast trivial ist. Beim Weiterspinnen des Fadens kamen noch einige Gedanken hinzu, welche im folgenden wiedergegeben werden sollen. Es zeigten sich dabei manche lose Querverbindungen zu bekannten mathematischen Themen.

## 2. Die Reproduktionseigenschaft

Mit dem folgenden Satz wird die erwähnte Behauptung über die Reproduktion beliebiger Muster gleich etwas präzisiert:

**Satz 1.** *Das Spiel werde mit einem Anfangsmuster begonnen, welches in einem Quadrat der Seitenlänge  $2^k - 1$ ,  $k=0, 1, \dots$ , enthalten ist. (D. h. alle Punkte ausserhalb des Quadrates sind mit 0 belegt). Dann besteht die Gitterbelegung nach  $2^k$  Schritten aus vier identischen Kopien des Anfangsmusters.*

**Beweis.** Aus der Spielregel folgt, dass jeder mit 1 belegte Punkt für den Folgezustand zu jedem Nachbarn einen Beitrag 1 liefert, und dass diese Beiträge modulo 2 zu addieren sind. Somit genügt es, die Abkömmlinge des Anfangsmusters, das nur eine 1 enthält, zu diskutieren, und diese dann für ein beliebiges Anfangsmuster entsprechend zu superponieren. Eine einfache Induktion nach  $k$  zeigt aber, dass eine einzelne 1 nach  $2^k$  Schritten in vier Einsen, je im Abstand  $2^k$  von der ursprünglichen, übergeht. (Siehe Abb. 2).



Abb. 2. Entwicklung des Einermusters

Für den Induktionsschritt hat man lediglich mit den vier Punkten des  $2^k$ -Musters als Zentren wieder diese vier Kreuze einzusetzen, um so das doppelt so grosse Kreuz des  $2^{k+1}$ -Musters zu erhalten.  $\square$

Aus dem Beweis ist auch sofort ersichtlich, wie die vier Kopien angeordnet sind. Zur Illustration des Satzes könnte etwa im Beispiel von Abb. 1 ein weiterer Schritt durchgeführt werden. Man überlege sich auch, wie das Muster für einen einzelnen Anfangspunkt nach  $(2^k - 1)$  Schritten aussieht. Es ist im übrigen amüsant, die scheinbar wirren Zwischenmuster wirklich einmal auf dem Bildschirm zu verfolgen.

### 3. Die Behandlung des Randes

Bis dahin wurde stillschweigend unterstellt, dass keine *Randphänomene* auftreten, dass also das Gitter genügend gross sei. Diese Betrachtungsweise mag, vor allem für die Programmierpraxis, angebracht sein: Der auf dem Bildschirm sichtbare Ausschnitt wird dann nach einer gewissen Anzahl von Schritten einfach leer.

Für eine theoretische Behandlung befriedigt aber diese Lösung nicht, insbesondere wenn man die Gitterbelegungen als Vektoren betrachtet und Vektorräume von einer festen endlichen Dimension haben möchte. Wenn man nun das Gitter z. B. auf ein Quadrat beschränkt und für die Randpunkte (die zwei oder drei Nachbarn besitzen) auch die ursprünglichen Regeln anwendet, erhält man jedoch störende Effekte, sobald ein Muster den Rand erreicht.

Ein eleganter Ausweg besteht darin, dass man als Gitter ein Quadrat mit der Seitenlänge  $l$  nimmt und je gegenüberliegende Ränder identifiziert, also einen Torus bildet. Alle unsere folgenden Betrachtungen werden für dieses *Torus-Quadrat* durchgeführt. Als Vorteil ergibt sich vor allem auch die Homogenität des Gitters; keine der  $l^2$  Punkte sind ausgezeichnet.

Torus-Quadrate, deren Seitenlänge  $l$  eine Zweierpotenz ist, stellen einen Sonderfall dar:

**Satz 2.** *Mit  $l = 2^k$  entsteht für ein beliebiges Anfangsmuster nach  $2^{k-1}$  Schritten die Nullbelegung.*

Der Beweis ist trivial. (Man betrachtet zunächst wiederum das Anfangsmuster, das nur eine 1 enthält).

### 4. Der Spieloperator als lineare Abbildung

Wenn man dem Torus-Quadrat den ungerichteten *Graph*  $G = (X, K)$  zuordnet, dessen Punktmenge  $X$  aus den Gitterpunkten, dessen Kantenmenge  $K$  aus den Gitterlinien besteht, erhält man eine neue Deutung des Spielschrittes.

Es sei  $n = |X| = l^2$ ,  $m = |K| = 2n = 2l^2$ . Die Teilmengen von  $X$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $W_0$  über  $\mathbb{Z}_2$ , diejenigen von  $K$  einen  $m$ -dimensionalen Vektorraum  $W_1$ , wenn man als Vektoraddition die Mengendifferenz benützt. Die Einermengen bilden je Basen und führen auf naheliegende Koordinatendarstellungen. Ferner betrachtet man lineare Abbildungen zwischen den beiden Räumen, nämlich die

*Randabbildung*  $\partial: W_1 \rightarrow W_0$ , und die

*Korandabbildung*  $\delta: W_0 \rightarrow W_1$ .

Der Rand einer einzelnen Kante besteht aus den beiden Endpunkten, der Korand eines einzelnen Punktes aus den mit ihm inzidenten Kanten. Mit der Linearität ergibt sich dann die Definition für beliebige Vektoren. (Siehe Harary [3], Läuchli [5]).

Ein Muster unseres Spiels kann nun als Element  $x \in W_0$  aufgefasst werden ( $x =$  Menge der mit 1 belegten Punkte), der Übergang zum Folgemuster als Anwendung einer linearen Abbildung («Spieloperator»)  $\alpha: W_0 \rightarrow W_0$ .

Damit gilt dann

**Satz 3.** Die Zusammensetzung von Korand- und Randabbildung ergibt den Spieloperator:  
 $\alpha = \partial \delta$ .

**Beweis.** Für beliebige Vektoren  $k \in W_1$ ,  $x \in W_0$  gilt:

$\partial k$  = Menge der Punkte mit ungeradem Grad im durch  $k$  erzeugten Teilgraph,

$\delta x$  = Menge der Kanten, die Punkte  $\in x$  mit Punkten  $\notin x$  verbinden.

Genau dann, wenn ein Punkt bei Anwendung von  $\alpha$  den Wert 1 bekommt, wenn er also eine ungerade Anzahl Nachbarn mit 1 besitzt, hat er auch eine ungerade Anzahl Nachbarn mit 0, ist er also jedenfalls durch eine ungerade Anzahl Kanten mit Punkten verbunden, die von dem seinigen verschiedene Werte tragen. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## 5. Umkehrbarkeit des Spiels

Eine naheliegende Frage ist nun, ob aus einem Zwischenmuster des Spiels die Reihe der Vorgänger *eindeutig rekonstruierbar* sei. Mit  $y = \alpha x$  ist offenbar genau dann auch  $y = \alpha(x + x_0)$ , wenn  $\alpha x_0 = 0$ . Der Vorgänger von  $y$  ist also genau in dem Falle nicht eindeutig, wo der Kern von  $\alpha$  ein nichtverschwindendes Element enthält.

Es ist sofort einzusehen, dass bei der Ausbreitung von Mustern in einem unbeschränkten Gitter die eindeutige Umkehrbarkeit des Prozesses gewährleistet ist. Dies gilt jedoch aufgrund des folgenden Satzes nicht (bzw. nur im unten präzisierten Sinne) für das Torus-Quadrat.

**Satz 4.** Es gilt:  $\dim(\ker \alpha) = t + 1$ , wo  $t = \dim(Z \cap Z')$ ,  $Z = \text{Zyklusraum}$ ,  $Z' = \text{Korandraum von } G$ .

(Die beiden Teilräume  $Z, Z' \subseteq W_1$  sind folgendermassen definiert:

$Z = \ker \partial$ . Die durch Elemente von  $Z$  erzeugten Teilgraphen zerfallen in disjunkte Kreise.

$Z' = \text{im } \delta$ . S. auch Beweis Satz 3).

**Beweis.** Allgemein gilt für die Zusammensetzung von linearen Abbildungen  $f, g$ :

$$\dim(\ker(fg)) = \dim(\ker g) + \dim(\ker f \cap \text{im } g).$$

Ferner ist sehr leicht zu sehen, dass  $\dim(\ker \partial) = 1$ ; denn nur der Korand der leeren und der vollen Punktmenge verschwindet.  $\square$

Die beiden Teilräume  $Z, Z'$  sind zwar bei beliebigen Graphen orthogonale Komplemente; da aber das für diese Feststellung in naheliegender Weise definierte Skalarprodukt nicht definit ist, können sie dennoch einen nichtleeren Durchschnitt besitzen ( $t > 0$ ). Dies ist in der Tat gerade beim Graph des Torus-Quadrates der Fall. Man findet z.B. sofort, dass die Punktmuster, die durch die beiden Quadrat-Diagonalen gebildet werden, für jedes  $l$  zum Kern von  $\alpha$  gehören. Für gerade  $l$  sind ferner leicht zwei weitere Kernvektoren zu entdecken.

Um schliesslich nochmals auf die eindeutige Umkehrbarkeit von  $\alpha$  zurückzukommen: Höhe und Breite des kleinsten Rechtecks, das ein gegebenes Muster enthält, werden durch jede Anwendung von  $\alpha$  je um 2 erhöht, solange das Rechteck noch nicht zu gross ist. Genauer: Es ist sicher  $\alpha x \neq 0$ , falls das Muster  $x$  mindestens zwei benachbarte leere Zeilen oder leere Kolonnen besitzt. Daraus folgt aber, dass auch beim Torus-Quadrat der Prozess von solchen Mustern aus eindeutig zurückverfolgt werden kann, welche die Bedingung von zwei leeren Zeilen oder Kolonnen erfüllen.

## 6. Ein Hilfssatz

Für die nachfolgende Betrachtung (in Nr. 7) ist ein Hilfssatz nützlich, der hier gerade in einer etwas allgemeineren Form, die wohl an sich Interesse verdient, als Satz 5 formuliert wird.

Wir gehen von einem quadratischen Gitterausschnitt mit Seitenlänge  $l$  aus und bilden damit einerseits das Torus-Quadrat und dessen Punktraum  $W_0$ . Andererseits erzeugen wir durch Zusammenheften von  $q^2$  dieser kleinen Quadrate und Identifikation an den Nahtstellen ein grosses Quadrat der Seitenlänge  $l' = ql$  und damit dann wieder ein Torus-Quadrat mit dem Punktraum  $W'_0$ . Die Spieloperatoren in den beiden Räumen seien  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Ausgehend von einem  $x' \in W'_0$  beobachtet man nun, dass das gleiche Resultat erhalten wird, ob man zuerst auf  $x'$   $h$ -mal den «grossen» Spieloperator  $\alpha'$  anwendet und dann die Muster der  $q^2$  kleinen Quadrate additiv überlagert, oder ob man zuerst diese Überlagerung durchführt und dann  $h$ -mal den «kleinen» Spieloperator  $\alpha$  anwendet. Es sei  $U: W'_0 \rightarrow W_0$  die lineare Abbildung, welche dieser Überlagerung entspricht.

Eine entsprechende Feststellung kann bei Anwendung der linearen Abbildung  $R: W_0 \rightarrow W'_0$  gemacht werden, welche darin besteht, dass das Muster von  $W_0$  (nur  $l^2$  Punkte!) in  $q^2$  Kopien in die kleinen Quadrate von  $W'_0$  gesetzt wird. Es gilt dann

**Satz 5.** Für  $h = 0, 1, \dots$  gelten die Gleichungen

- (1)  $U (\alpha')^h = \alpha^h U$
- (2)  $R \alpha^h = (\alpha')^h R.$

**Beweis.** Es ist sofort zu sehen, dass  $U \alpha' x' = \alpha U x'$  für  $|x'| = 1$ , und damit auch für alle  $x' \in W'_0$ . Die Behauptung (1) ergibt sich dann durch  $h$ -maliges Hinüberziehen des Spieloperators von der rechten auf die linke Seite von  $U$  mit  $U \alpha' = \alpha U$ . Genau gleich beweist man (2).  $\square$

## 7. Periodizität

Das Funktionieren des Spieloperators auf  $W_0$  könnte auch in der Terminologie der *endlichen Automaten* beschrieben werden (bzw. als *dynamisches System*, siehe Jacobs [4]), da ja jedes Muster nur von seinem unmittelbaren Vorgänger abhängt. Der Automat hätte  $2^n$  Zustände, von denen keiner als Anfangszustand ausgezeichnet ist. Da keine Zeichen von aussen gelesen werden (was auf dasselbe herauskommt, wie wenn das Eingabealpha-

bet nur aus einem Zeichen besteht), wird der Prozess nach einer eventuellen Anfangsphase sicher *periodisch*.

Wir werden sehen, dass leicht etwas über die Periodenlängen ausgesagt werden kann. Der Fall  $l = 2^k$  soll aufgrund von Satz 2 gleich ausgeschlossen werden. (Triviale Periode der Länge 1). Zunächst sei  $l$  ungerade. Wie schon vorher, genügt es wieder, mit dem Muster, das nur eine 1 enthält, zu beginnen. Wir legen diese 1 z. B. in die vier identifizierten Ecken des Torus-Quadrates und numerieren die Punkte der Grundlinie von 0 bis  $l$ . Nach  $2^k$  Schritten enthalten genau die beiden Punkte mit den Nummern  $a$  für  $2^k \equiv \pm a \pmod{l}$  eine 1. Dasselbe spielt sich auch auf den übrigen Randlinien des Quadrates ab, im Inneren verschwinden dann alle Werte.

Dass dies richtig ist, leuchtet ohne weiteres ein, kann aber nach Satz 5, (1) verifiziert werden, indem man zuerst das Ein-Punkt-Muster in einem genügend grossen  $W'_0$  sich ausbreiten lässt und dann die Überlagerung durchführt. Aus dem vorher Gesagten folgt nun, dass nach  $2^k$  Schritten, wenn  $2^k \equiv \pm 1 \pmod{l}$ , dasselbe Muster wie nach einem Schritt vorhanden ist. Ein solches  $k$  existiert auch tatsächlich, denn die zu  $l$  primen Restklassen modulo  $l$  bilden eine multiplikative Gruppe. 2 gehört dazu und erzeugt eine Untergruppe. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

**Satz 6.** *Sei  $l$  ungerade,  $k$  die kleinste positive natürliche Zahl, für welche  $2^k \equiv \pm 1 \pmod{l}$ . Dann ist für beliebige Anfangsmuster die Folge der durch  $\alpha$  erzeugten Muster nach dem ersten Schritt periodisch mit einer Periodenlänge  $r = 2^k - 1$ .*

In der folgenden Tabelle sind einige Periodenlängen aufgeführt:

$l$	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$r$	1	3	7	7	31	63	15	15	511

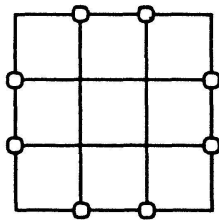
Im allgemeinen können kürzere Periodenlängen auftreten, die aber Teiler von  $r$  sind. Die Zurückführung des Falles von geraden  $l$  (mit ungeradem Primteiler) auf ungerade  $l$  wird dem Leser überlassen.

## 8. Beziehung zu anderen Themen

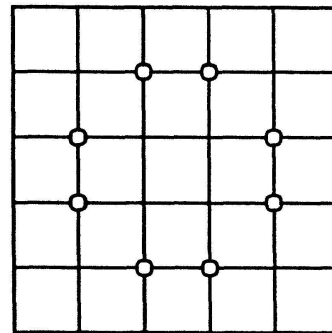
Hier möge noch auf eine gewisse Verwandtschaft zwischen unserem Spieloperator und dem *Laplace-Operator*  $\Delta$  hingewiesen werden. Eine grobe Diskretisierung des letzteren in einem Quadratgitter führt bekanntlich dazu, für  $\Delta u$  in einem Gitterpunkt näherungsweise den Mittelwert der Funktionswerte von  $u$  in den vier Nachbarpunkten zu setzen. Demgegenüber ist die 0-1-Belegung von  $\alpha x$  in jedem Punkt gleich der Summe modulo 2 der vier Nachbarwerte desselben Punktes in  $x$ .

Und um die Analogie noch etwas weiter zu strapazieren könnte man hier, entsprechend den Eigenfunktionen von  $\Delta$ , nach den Eigenvektoren von  $\alpha$  fragen. Zum Eigenwert 0 gehören offenbar die nichtverschwindenden Elemente  $x$  des Kerns, für welche also  $\alpha x = 0$  ist. Diese wurden in Nr. 5 bereits besprochen.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind die nichtverschwindenden Fixpunkte  $x$  von  $\alpha$ , also mit  $\alpha x = x$ . Für  $l = 2^k$  existieren keine solchen. (S. Satz 2). Je ein Beispiel für  $l = 3$  und  $l = 5$  ist in Abb. 3 angegeben.



$l = 3$



$l = 5$

Abb. 3. Beispiele für Fixpunkte von  $\alpha$

Mit diesem bekommt man nach Satz 5, (2) auch sofort entsprechende Fixpunkte für alle  $l$ , die Vielfache von 3 oder 5 sind. Beispiele für andere  $l$  habe ich nicht gefunden.

Schliesslich noch eine Querverbindung zu einem weiteren aktuellen Thema: In Nr. 7 wurde das Spiel als *ein* endlicher Automat interpretiert. Ebenso gut kann man natürlich in jedem Gitterpunkt einen sehr einfachen Automaten setzen, das Ganze also als *zellularen Automaten* (bzw. *neuronales Netz*) sehen. Jeder Knoten kann dann zwei Zustände annehmen, und der Folgezustand hängt gemäss unseren Spielregeln vom aktuellen Zustand der vier Nachbarn ab.

Ein anderes, interessantes Beispiel für einen zellularen Automaten auf einem Quadratgitter findet sich in Dewdney [2].

P. Läuchli, Institut für Theor. Informatik, ETH Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Berlekamp E. R., Conway J. H. and Guy R. K.: Winning ways for your mathematical plays. Academic Press, vol. 2. New York, 1982.
- 2 Dewdney A. K.: Computer Recreations. Scientific American, August 1989, p. 88.
- 3 Harary F.: Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA (1969), Chapter 4.
- 4 Jacobs K.: Resultate, Ideen und Entwicklungen in der Mathematik, Band 1: Proben Mathematischen Denkens. Vieweg, Braunschweig (1987), Kapitel VI.
- 5 Läuchli P.: An elementary theory for planar graphs. Internal Report Nr. 122, Departement Informatik. Dec. 1989.