

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 55 (2000)

Artikel: An Alternate Proof of Mason's Theorem
Autor: Snyder, Noah
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5631>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

An Alternate Proof of Mason's Theorem

Noah Snyder

Noah Snyder is an undergraduate student at Harvard University. He plans on continuing in mathematics in both graduate school and as a career. At present he is most interested in Number Theory. He also plays on Harvard's Ultimate Frisbee team. He loves theatre, the band REM, and Douglas Adam's "The Hitchhiker's Guide to the Galaxy".

Definition. Let f be a non-zero polynomial in $k[x]$ for some algebraically closed field k . We define $n_0(f)$ to be the number of distinct zeroes of f .

Lemma. Let f be a non-zero polynomial in $k[x]$. Then,

$$\deg(f) \leq \deg(f, f') + n_0(f),$$

where (g, h) denotes the greatest common divisor (gcd) of g, h .

Remark 1. Since the derivative is a purely algebraic operation of polynomials, it makes sense to talk about the derivative in $k[x]$. Furthermore, all the familiar rules of calculus can be proven algebraically in this new context.

In dem folgenden Beitrag von N. Snyder kommen wir auf den Elemente-Aufsatz von S. Lang über die *abc*-Vermutung aus dem Jahr 1993 zurück (siehe El. Math. 48 (1993), 89–99). Dort wurde der von R. C. Mason gefundene Beweis der *abc*-Vermutung für Polynome vorgestellt. In der Zwischenzeit hat N. Snyder, ein junger Mathematik-Student, einen noch wesentlich einfacheren Beweis des Satzes von Mason gefunden, den wir hier wiedergeben. Anhand dieses Beispiels kann sehr schön verfolgt werden, wie sich im Laufe der Zeit Beweise von Sätzen vereinfachen, ein wichtiges Element für die Entwicklung der Mathematik. Die (jungen) Leserinnen und Leser mögen durch diesen Beitrag von N. Snyder angespornt werden, nach solch' überraschenden Lösungen zu suchen. /k

Proof of the lemma. Let $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ be the roots of f with multiplicities a_1, \dots, a_m , so that $f = c(x - \alpha_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{a_m}$. Then, by the product rule,

$$f' = ca_1(x - \alpha_1)^{a_1-1}(x - \alpha_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{a_m} \\ + c(x - \alpha_1)^{a_1} \frac{d}{dx} ((x - \alpha_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{a_m}).$$

Therefore, $(x - \alpha_1)^{a_1-1} | (f, f')$. Similarly, $(x - \alpha_i)^{a_i-1} | (f, f')$. So we see that $(x - \alpha_1)^{a_1-1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{a_m-1} | (f, f')$. Therefore, since f is non-zero, $\deg(f) - n_0(f) \leq \deg(f, f')$. The lemma follows immediately. \square

Remark 2. If k is of characteristic zero then, in the statement of the lemma, equality holds. The following theorem, however, requires only this weaker lemma.

Theorem (Mason's Theorem). *Let a, b , and c be relatively prime polynomials in $k[x]$ such that $a + b = c$. Furthermore, we require that a' , b' , and c' are not all zero. Then, $\deg(c) \leq n_0(abc) - 1$.*

Proof. $a + b = c$. Therefore, $a' + b' = c'$. Multiplying the first equation by a' , the second by a , and subtracting, we find that $a'b - ab' = a'c - ac'$. Therefore, (a, a') , (b, b') , and (c, c') all divide $a'b - ab'$. Since they are relatively prime,

$$(a, a')(b, b')(c, c') | (a'b - ab').$$

I claim that the right hand side is non-zero. If $a'b - ab' = 0$, then $a|a'b$. Since a and b are relatively prime, $a|a'$. Therefore, $a' = 0$. Similarly, b' and c' would also be zero, contradicting the assumption. Therefore, the right hand side is non-zero, and

$$\deg(a, a') + \deg(b, b') + \deg(c, c') \leq \deg(a) + \deg(b) - 1.$$

We move everything to the right hand side and add $\deg(c)$ to both sides to find that

$$\deg(c) \leq \deg(a) - \deg(a, a') + \deg(b) - \deg(b, b') + \deg(c) - \deg(c, c') - 1.$$

Applying the lemma yields the required result. \square

Remark 3. If k is of characteristic zero, then f' being non-zero is equivalent to f being non-constant, and so we get the familiar statement of Mason's Theorem.

Noah Snyder
Harvard University
417 Adams Mail Center
Cambridge, MA 02138, U.S.A.
e-mail: nsnyder@fas.harvard.edu