Elem. Math. 56 (2001) 130 – 134
0013-6018/01/030130-5 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1171: Es sei $A = (a_{ij})$ eine normale nichtsymmetrische reelle 3×3-Matrix. Beweise, dass

$$\begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A ist.

Lajos László, Budapest, H

Aufgabe 1172: Beweise: Das Inkreiszentrum eines Dreiecks liegt genau dann auf der Eulerschen Geraden, wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Aufgabe 1173 (Die einfache dritte Aufgabe): Es sei A eine quadratische (reelle oder komplexe) Matrix, die die Gleichung $A^2 = -A$ erfüllt. Zeige, dass zwischen dem Rang und der Spur der Matrix A die Beziehung $\mathrm{rk}(A) = -\mathrm{tr}(A)$ besteht.

Götz Trenkler, Dortmund, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2000

Aufgabe 1159. Eine Folge (a_ℓ) reeller Zahlen heisse quotientenkonstant, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}$$

gilt. Man zeige: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es ein Polynom f_n vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass die Folge $(a_\ell) := (f_n(\ell))$ quotientenkonstant ist. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein solches Polynom f_n.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 18 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), 2 Lösungen waren nicht gezeichnet.

Die folgenden Überlegungen ergeben sich durch Kombination der Lösungen von *O.P. Lossers* und *Walter Burgherr*: Weil $a_1/a_2 = -1$ unmöglich ist, lässt sich die Bedingung der Quotientenkonstanz auch als

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 + \ldots + a_k}{a_1 + \ldots + a_{2k}} \tag{1}$$

schreiben. Gibt es nun ein Polynom f_n, so dass die Glieder der Ausgangsfolge durch $(a_\ell) = (f_n(\ell))$ gegeben sind, lassen sich auch die Summen $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ durch ein Polynom F_{n+1} (vom Grad $n+1$) erzeugen:

$$F_{n+1}(k) = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \tag{2}$$

wobei zwischen f_n und F_{n+1} der Zusammenhang

$$f_n(k) = F_{n+1}(k) - F_{n+1}(k-1) \tag{3}$$

besteht. Weil für dieses Polynom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F_{n+1}(2x)}{F_{n+1}(x)} = 2^{n+1}$$

gilt, folgt zusammen mit (1), dass für $x = 1, 2, \ldots$ die Beziehung

$$F_{n+1}(2x) - 2^{n+1}F_{n+1}(x) = 0$$

gelten muss, und durch einen einfachen Koeffizientenvergleich ergibt sich $F_{n+1} = \alpha \cdot x^{n+1}$. Zusammen mit (3) erhält man

$$f_n(x) = \alpha \cdot (x^{n+1} - (x-1)^{n+1}) = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} x^k.$$

Es bereitet keine Mühe nachzuweisen, dass diese Polynome tatsächlich quotientenkonstante Folgen erzeugen.

Aufgabe 1160. $S_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ sei ein n-Tupel natürlicher Zahlen, welche der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\ell} s_j \le k \cdot \ell + r, \quad (k \ge 2,\ r \ge 0;\ \ell = 1, 2, \dots, n)$$

genügen. Bestimme die Anzahl $a(n, k, r)$ solcher n-Tupel.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingetroffen, 2 davon waren nicht gezeichnet: Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Mehrere Lösungen enthielten Fehler. Der am häufigsten beschrittene Weg hatte als Ausgangspunkt eine Rekursionsformel, welche anschliessend in einen Induktionsbeweis eingebaut wurde. Eine der ungezeichneten Lösungen enthielt eine rein kombinatorische Überlegung:

Vorerst lassen wir $s_j = 0$ zu. Die Menge der zulässigen n-Tupel $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ entspricht bijektiv der Menge der $(n+1)$-Tupel

$$(\underbrace{s_1, s_2, \dots, s_n}_{\text{zulässig}}, k(n+1) + r + 1 - \sum_{j=1}^{n} s_j).$$

Mit der Deutung „s_1 nach rechts, 1 nach oben, s_2 nach rechts, 1 nach oben, usw." können wir die Menge dieser $(n+1)$-Tupel auffassen als Menge der minimalen Gitterpunktwege von $(0,0)$ nach $(k(n+1) + r + 1, n)$, welche – ausser im Endpunkt – die Gerade $x = ky + k + r + 1$ meiden. Die Aufgabe, solche Wege zu zählen, ist ein wohlbekanntes Problem, das sich rein kombinatorisch lösen lässt. Man findet

$$\tilde{a}(n, k, r) = \frac{k + r + 1}{n} \binom{(k+1)(n+1) + r - 1}{n - 1}.$$

Ist der Begriff „natürliche Zahl" so zu verstehen, dass 0 nicht erlaubt ist, ist k durch $k - 1$ zu ersetzen, und es ergibt sich

$$a(n, k, r) = \frac{k + r}{n} \binom{k(n+1) + r - 1}{n - 1}.$$

Aufgabe 1161 (Die einfache dritte Aufgabe). Die Elemente von

$$\mathbb{P}_n = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \text{ mit } \mathrm{ggT}(x,n) = 1\}$$

bilden bekanntlich bezüglich der Multiplikation modulo n eine kommutative Gruppe, die sogenannte prime Restklassengruppe modulo n. Sind $\mathbb{P}_{15}$ und $\mathbb{P}_{16}$ isomorph? Wie steht es mit $\mathbb{P}_{20}$ und $\mathbb{P}_{24}$?

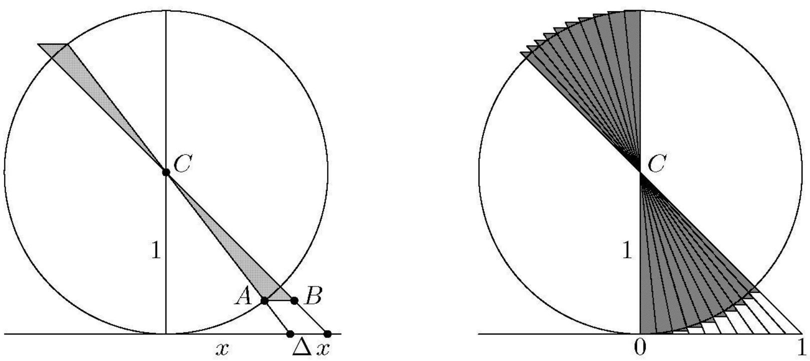
Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 18 Zuschriften eingetroffen, zwei davon waren nicht gezeichnet: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Karl Stoop (Stettlen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Die meisten Einsender studieren die Ordnung der Elemente der einzelnen Gruppen. *Karl Stoop* argumentiert wie folgt: Alle Elemente von $\mathbb{P}_{24}$ haben die Ordnung 2, in den anderen drei Gruppen hat es auch Elemente höherer Ordnung; also ist $\mathbb{P}_{24}$ zu keiner der anderen Gruppen isomorph. Hingegen gilt $\mathbb{P}_{15} \cong \mathbb{P}_{16}$, $\mathbb{P}_{16} \cong \mathbb{P}_{20}$ und $\mathbb{P}_{15} \cong \mathbb{P}_{20}$. Mögliche Isomorphismen bestehen gemäss der Tabelle

$\mathbb{P}_{15}$	1	2	7	11	4	8	13	14
$\mathbb{P}_{16}$	1	3	5	7	9	11	13	15
$\mathbb{P}_{20}$	1	3	13	11	9	7	17	19

Nachtrag zu Aufgabe 1155. Nachträglich ist von Gerhard Wanner (Genf, CH) eine Lösung eingetroffen, die wir unseren Leserinnen und Lesern nicht vorenthalten möchten. Es geht darum, mit elementaren Mitteln den Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ zu bestimmen.



Nach Pythagoras ist das Dreieck ABC in der Figur links um den Faktor $1/\sqrt{1+x^2}$ kleiner als das ähnliche Dreieck mit Grundlinie Δx und Höhe 1. Somit haben die beiden grauen Dreiecke zusammen die Fläche

$$F = \frac{\Delta x}{1+x^2} .$$

Wenn man nun das Intervall $[0,1]$, wie in der Integralrechnung üblich, in kleine Stücke zerteilt, dann füllen die entsprechenden Dreiecke gerade zwei Achtel des Kreises (siehe rechtes Bild), und somit ist

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi/4.$$

Wer keine Angst vor dem Unendlichen hat, der sieht auch, dass wir mit x von $-\infty$ bis $+\infty$ gerade den *ganzen* Kreis ausfüllen; also gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi .$$