

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 60 (2005)

**Artikel:** Note on the diophantine equation: [Formel]  
**Autor:** Müller, Tom  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10205>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Note on the diophantine equation

$$1 + 2p + (2p)^2 + \dots + (2p)^n = y^p$$

---

---

Tom Müller

Tom Müller ist 25jährig. Er studierte Mathematik an den Universitäten Zürich und Trier. Seine Interessen liegen in der Analysis, der Zahlentheorie sowie der Mathematik-Geschichte.

In a note published in 1987, A. Rotkiewicz [2] showed that repunits, i.e., numbers of the form  $111\dots 11 = 1 + 10 + \dots + 10^n$ , are never squares or cubes for  $n \geq 1$ . He did this using a more general result on the diophantine equations  $1 + x + \dots + x^n = y^2$  and  $1 + x + \dots + x^n = y^3$  proved by W. Ljunggren in 1943 [1].

The following result implies that repunits are never fifth powers of integer numbers as well.

**Theorem.** *Let  $p$  be an odd prime number or a Carmichael number and let  $n \in \mathbb{N}$ . Then, the diophantine equation  $1 + 2p + (2p)^2 + \dots + (2p)^n = y^p$  has no solution  $y$ .*

*Proof.* For  $n = 1$  the diophantine equation gives

$$1 + 2p = y^p. \tag{1}$$

Because of  $y^p \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $y$  cannot be a multiple of  $p$ . Moreover, Fermat's little theorem gives  $y^p \equiv y \pmod{p}$ . Therefore,  $y$  has to be of the form  $y = pk + 1$  with a  $k \in \mathbb{N}_0$ . Hence, the Bernoulli inequality implies  $1 + 2p = y^p \geq 1 + p^2k$ , i.e.,  $2 \geq pk$ . This is possible only if  $k = 0$  (and  $y = 1$ ) contradicting (1).

„Repunits“ sind Zahlen mit lauter Einsen: 1, 11, 111, 1111, ... Es ist bekannt, dass sie niemals Quadrate oder Kubikzahlen sein können. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sie auch keine fünfte Potenzen sein können. Dies ist der Spezialfall  $p = 5$  des hier durch Kongruenzschlüsse bewiesenen Satzes, dass die im Titel genannte Gleichung keine Lösungen  $n, y$  in positiven ganzen Zahlen hat, wenn  $p$  eine ungerade Primzahl, oder allgemeiner eine ungerade Zahl ist, für die der kleine Fermatsche Satz in der Form  $x^p \equiv x \pmod{p}$  für alle  $x$  gilt.

Suppose now that there is an  $n > 1$  leading to the solution  $y \in \mathbb{Z}$ . Then the two congruences

$$y^p \equiv 1 \pmod{2p} \quad (2)$$

and

$$y^p \equiv 2p + 1 \pmod{(2p)^2} \quad (3)$$

have to be fulfilled simultaneously. To get equation (2),  $y$  must be of the form  $(2p)k + 1$  with a  $k \in \mathbb{Z}$ . This can be seen writing  $y = 2pk + r$  with  $k \in \mathbb{Z}$  and  $r \in \{0, 1, \dots, 2p - 1\}$ . Then

$$(2pk + r)^p \equiv r^p \pmod{2p}$$

and again with Fermat

$$(2pk + r)^p \equiv r \pmod{p},$$

leading to  $y^p = 2pl + r^p$  and  $y^p = pm + r$  with  $l, m \in \mathbb{Z}$ . As  $r$  and  $r^p$  are both either odd or even,  $pm$  is a multiple of 2 and therefore,  $m$  is an even number. Hence,  $y^p \equiv 1 \equiv r \pmod{2p}$ , and so  $r = 1$ .

Using the binomial formula we obtain  $y^p = (2pk + 1)^p \equiv 2p^2k + 1 \pmod{(2p)^2}$ . Then an even  $k$  leads to  $y^p \equiv 1 \pmod{(2p)^2}$ , while we get  $y^p \equiv 2p^2 + 1 \pmod{(2p)^2}$  with  $k$  odd. Considering the inequality  $1 < 2p + 1 < 2p^2 + 1 < (2p)^2$  this contradicts the congruence (3). Therefore, the assumed  $n$  does not exist.  $\square$

Choosing  $p = 5$ , the diophantine equation  $1 + 10 + \dots + 10^n = y^5$  has no solution, and so the numbers 11, 111, 1111, ... are never fifth powers of integer numbers.

## References

- [1] Ljunggren, W.: Noen setninger om ubestemte likninger av formen  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$ . *Norsk Mat. Tidsskr.* 25 (1943), 17–20.
- [2] Rotkiewicz, A.: Note on the diophantine equation  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = y^m$ . *Elem. Math.* 42 (1987), 76.

Tom Müller  
 Institut für Cusanus-Forschung  
 an der Universität und der  
 Theologischen Fakultät Trier  
 D-54290 Trier, Deutschland  
 e-mail: muel4503@uni-trier.de