

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 70 (2015)  
**Heft:** 2

**Buchbesprechung:** Rezensionen

**Autor:** Schneebeli, H.R. / Kolpakov, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Rezensionen

---

---

**A. Ostermann, G. Wanner: *Geometry by Its History*.** 437 Seiten, 64 €. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012; ISBN 978-3-642-29162-3.

Dieser Text umfasst den Inhalt einer Grundvorlesung Geometrie für Naturwissenschaften und könnte als Vademecum den Unterrichtenden im Gymnasium ein ganzes Berufsleben lang nützlich sein. Der reiche Inhalt wird gemäss der historischen Entwicklung der Geometrie bis in die Gegenwart angeordnet. Dabei meint ... *by Its History* nicht den betont wissenschaftshistorischen Standpunkt.

Eine offensichtliche Zweiteilung trennt die klassische synthetische Geometrie von der neuzeitlichen analytischen Geometrie, die wesentlich auf algebraische Strukturen aufbaut. Ausgangspunkt für die Behandlung der klassischen Geometrie sind die Sätze von Thales (Strahlensätze) und der Satz von Pythagoras. Darauf folgen eine Übersicht zu Euklid's Elementen, Kegelschnitte, weitere Ergebnisse über spezielle Kurven (Nicomedes und Archimedes), Dreiecksgeometrie, die Kreissätze von Steiner und mehr. Bemerkenswert ist die geometrische Darstellung, wie Newton die Keplergesetze aus dem von ihm postulierten Gravitationsgesetz hergeleitet hat.

Die algebragestützte analytische Sicht wird eröffnet mit einem Problem von Pappus, das Descartes mit analytischer Geometrie behandelt hat. Es folgt eine analytische Behandlung von Kegelschnitten und anderen Kurven, Zeugen einer Vorstufe der Differentialgeometrie; des Weiteren die algebraische Behandlung der Frage nach der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, Raumgeometrie und Vektoralgebra, Matrizen, lineare Abbildungen, quadratische Formen, Perspektive und projektive Geometrie.

Der Text wird getragen durch mannigfaltige Beweise einer didaktischen Verpflichtung. Zu nennen sind insbesondere die sorgfältig gestalteten Abbildungen, insbesondere auch Stereogramme zur Unterstützung der Raumschauung, ferner Reproduktionen historischer Abbildungen und Zitate von Originaltexten. Auch gibt es zu jedem Kapitel eine Anzahl von gut gewählten Aufgaben zur Vertiefung, Anwendung, Ergänzung des vermittelten Stoffes. Die letzten rund 50 Seiten des Textes enthalten knappe Lösungen. Es folgen ein ausführliches Stichwortverzeichnis und umfangreiche Literaturangaben.

Die grosse Detailkenntnis der Autoren ist beeindruckend. Die Reichhaltigkeit führt bisweilen zu filigranen Verästelungen (z.B. bis in die Aufgabensparte von *Elemente der Mathematik*), in die man sich versteigen kann. Dabei kann der Blick aufs Ganze zeitweilig beeinträchtigt werden. Dieser Text deckt weit mehr ab, als der gymnasiale Geometrieunterricht verlangt. Die Ausblicke oder Erläuterungen der Hintergründe oder Zusammenhänge sind jedoch für die Unterrichtenden wesentlich. Doch bei allen Qualitäten ist dies keine Blaupause für einen Geometrieunterricht im Gymnasium, wohl aber eine reichhaltige Quelle für Ideen und Referenzen für die Unterrichtenden.

Der Text ist erstaunlich vollständig, und doch habe ich da und dort etwas vermisst. Drei Beispiele sollen genügen:

- Neben Eulers Beiträgen etwa zur Trigonometrie oder zur Dreiecksgeometrie findet man in einer Aufgabe auch *Eulers Polyedersatz*. Ich habe den Hinweis vermisst auf die Bedeutung dieser topologischen Invariante am Anfang einer ganz neuen Entwicklung. Die Eulercharakteristik kann im Gymnasium ein aussichtsreiches Thema sein.
- Kleins Erlanger Programm wird erwähnt, aber wir sehen nicht, dass die Algebraisierung mit der Betonung der *Rolle der Gruppen* von strukturerhaltenden Abbildungen eine neue Dimension annimmt. Bei

Poincaré wurde die Gruppe zur Quintessenz des Raumbegriffes. In der Elementargeometrie wurde nach 1960 versucht, alles auf den Spiegelungsbegriff zu reduzieren.

- Ähnlich finden sich auch Hinweise auf *automatisches Beweisen* im Text. Ich hätte dazu mehr gewünscht: Bemerkungen zum Satz von Tarski zur Vollständigkeit der „Elementargeometrie“, zur geometrischen Realisierung der Arithmetik (inklusive der Quadratwurzeloperation) in  $\mathbb{R}$  mit finiten Mitteln (Zirkel und Lineal) oder Hinweise auf Buchbergers Algorithmus als Erweiterung der Gaußelimination.
- Ein wünschbarer Ausblick in die Gegenwart der Geometriepraxis (CAD, Computational Geometry) ist aber vielleicht mit dem Zusatz ... *Its History* unverträglich.

Die kritischen Anmerkungen markieren Grenzen, die der Text nicht überschreitet. Sie sollen das grosse Verdienst der Verfasser nicht schmälern. Das Buch kann insbesondere auch in der Ausbildung und Berufspraxis von Lehrkräften eine wichtige und nützliche Rolle spielen. Man kann nur wünschen, dass es sich weit verbreitet und der Erosion der Geometriekenntnisse entgegenwirkt.

H.R. Schneebeli, Wettingen

**H. Walser: Fibonacci, Zahlen und Figuren.** 98 Seiten, EUR 14.50. Edition am Gutenbergplatz, EAGLE 060, 2012; ISBN 978-3-937219-60-8.

Leonardo di Pisa, genannt Fibonacci, Kaufmannssohn, Rechenmeister, Hofmathematiker von Friedrich Barbarossa, ist eine wichtige Persönlichkeit für die Mathematikgeschichte. Auf Reisen im Maghreb, in Spanien und der Provence erlebte er eine technologische Überlegenheit arabischer Kaufleute. An Stelle von römischen Zahlen und einem Rechenbrett benutzten sie das Dezimalsystem und die indisch-arabische Notation. Durch Gedankenaustausch entlang der Seidenstrasse und anderer Handelsrouten erwarben sie sich Kenntnisse, Vorteile und Profit aus der damals fortschrittlichen orientalischen Mathematik. Fibonacci erkannte den Wert dieses Wissens und setzte sich zum Ziel, die neuen Kenntnisse in seiner Heimat den Kaufleuten zu vermitteln. Mit didaktischer Absicht stellte Fibonacci die neuen Erkenntnisse traditionsgemäss in Form gelöster Musteraufgaben zusammen. Sein *Liber Abaci* wurde der bedeutendste mathematische Text des europäischen Mittelalters.

In einer der Aufgaben wird ein frühes Modell zur Populationsentwicklung so formuliert: In einem Gehege befindet sich ein Paar junger Kaninchen, ein Männchen und ein Weibchen. In einem Monat werden sie erwachsen. Jedes Paar erwachsener Kaninchen wirft jeden Monat ein Paar Junge, ein Männchen und ein Weibchen. Angenommen, kein Kaninchen stirbt. Wie viele Kaninchen gibt es im Gehege nach 12 Monaten? Fibonacci's Kaninchen haben wenigstens im mathematischen Universum Unsterblichkeit erlangt in Gestalt der Fibonaccifolge mit der bekannten rekursiven Definition  $a_1 := a_2 := 1$  und  $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$  für  $n > 2$ . Übrigens: Die von Fibonacci angestrebte Erneuerung der Rechenpraxis beanspruchte in ganz Europa rund 400 Jahre, bis die Vorteile, die Fibonacci rasch erkannt hatte, sich allgemein im Handel und im Gewerbe durchsetzten.

Heute ist die Fibonaccifolge noch immer der Prototyp einer linearen Rekursion. Wie viel Potenzial in diesem Thema steckt, zeigt die Existenz einer Zeitschrift, des *Fibonacci Quarterly*. Wie der Text von Hans Walser, befasst sie sich mit den zahlreichen Aspekten des Themas und seinen vielfältigen Verzweigungen. Der vorliegende Text fokussiert auf ein engeres Zielpublikum: Studierende, Schülerinnen und Schüler, Lehrpersonen und interessierte Laien.

Hans Walser bearbeitet den Stoff wie einen Diamanten, der durch die Kunst des Schleifers die Fähigkeit zum Funkeln und zur Lichtbrechung erst entfalten kann. Zwei Eigenschaften des Textes sind augenfällig: die schlichte und präzise Sprache und die spielerische Leichtigkeit, mit der Themen vernetzt, abgewandelt oder ästhetisch ansprechend und eindrücklich dargestellt werden. Aus Zahlentheorie und Algebra wird unvermittelt Geometrie, wird wieder Algebra oder Analysis oder Kombinatorik. Ist diese Ambivalenz zwischen vielerlei Sichtweisen das Geheimnis des Funkelns dieses Diamanten?

Zum Inhalt: Der Text beginnt mit der klassischen Fibonaccifolge und verschiedenen Visualisierungen derselben. Die erste geometrische Verwandlung handelt vom Ansetzen von Quadraten auf Polygonseiten. Bald trifft Fibonacci auf Pythagoras und Querbezüge zum Goldenen Schnitt werden sichtbar. Im Abschnitt *Ausdünnen und Verdichten* werden Teilfolgen der Fibonaccifolge studiert oder die Fibonaccifolgen werden interpoliert, so dass wir die reellwertigen oder komplexwertigen Verwandten kennen lernen. Fibonaccifolgen in Restklassenringen  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  werden periodisch. Bezüge zu verwandten linearen Rekursionen, die periodisches Verhalten zeigen, runden das Thema ab.

Ein ausführliches Zitat aus Moritz Cantors *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* (1900) ist als biografische und historische Notiz zu Fibonacci angefügt. Das Thema entpuppt sich in Walsers Aufbereitung als ein

reichhaltiger Mikrokosmos, geeignet auch für Begabtenförderung, anregend für Unterrichtsprojekte oder Maturarbeiten. Der Autor geht mit herausfordernden Fragen auf die Leser zu und regt deren Gedanken an, bietet dann aber auch Hilfestellungen und seine eigenen Lösungen an.

Dieses kleine Buch hat mir beim Lesen grosse Freude bereitet.

H.R. Schneebeili, Wettingen

**J. Matoušek: Thirty-three Miniatures.** Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra. 182 Seiten, \$ 25.–. Student Mathematical Library vol. 53, AMS, Rhode Island, 2010; ISBN 978-0-8218-4977-4.

This book is not only an overview or a beginner's textbook (in fact, its structure is somewhat anti-textbook), but a calling invitation into the world of combinatorics, in fact, not only into the world of combinatorics, but also into that of linear algebra. And not even only into these two subjects: number theory, algorithms, codes, and geometry will appear on the book's pages – pages that carry mathematical gems, not just essays, turning the book into a small but rich treasure. Everyone can discover it to his or her personal admiration.

Each of the thirty-three miniatures is self-contained, although some of them refer to others. However, different entries require different mathematical background from the reader. These miniatures are sometimes excerpts of known applications of linear algebra to other areas of mathematics. Sometimes they are a little sketchy, so a certain level of mathematical culture is necessary in order to fully enjoy the reading. The book starts with simple but lively observations concerning the Fibonacci numbers and then soon involves far more complicated matters, not only classical results, but also contemporary ones. Most of the time the problem in question does not lie directly in the heart of linear algebra, but it has a solution emerging from there. Sometimes this solution is a well-known algorithm or a classical trick, showing just one of several possible approaches. Sometimes linear algebra comes to use unexpectedly and provides a really elegant and laconic solution, demonstrating its full power and beauty. In such a case, if the problem is a gemstone, the methods of linear algebra are both a chisel and a scaif, giving the gem its cut and polishing it to perfection.

The book provides a deep insight in how far linear algebra protrudes into graph theory through the theory of graph spectra, by describing, e.g. the sparsest cut algorithm or the classification of Moore graphs. It also shows classical applications of linear algebra to extremal set theory, error-correcting codes, such as Hamming's code, and algorithms from graph theory, such as detecting sub-graphs of given type. Another big part is the description of several probabilistic algorithms. These are basically employed in verification of identities, although the applications shown are quite pictorial, such as efficient verification of matrix multiplication or testing the existence of a perfect matching in a graph. The book also shows the use of linear algebra in geometry, e.g. by considering equilateral sets, equiangular lines or tiling of a rectangle by squares.

Reading this book is recommended to those having some background in linear algebra and interest in combinatorics, geometry and associated computational algorithms. It will reward everyone seeking lively and interesting examples of the interplay between these parts of mathematics, both for learning or teaching needs, out of one's own curiosity or in order to illustrate one's future linear algebra course. The book will also be a perfectly stimulating reading for those who want to broaden their general mathematical culture. The references provided in the preface and after each miniature provide a good source for further reading.

A. Kolpakov, Fribourg