**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 74 (2019)
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

Elem. Math. 74 (2019) 38 – 43
0013-6018/19/010038-6
DOI 10.4171/EM/379

**Elemente der Mathematik**

# Aufgaben

## Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1383:**

a) Man zeige, dass für $\alpha \in (0, 1]$ die in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorphe Funktion $f(z) = (1 - z)^\alpha$ Hölder–Lipschitz stetig ist zur Ordnung $\alpha$, d.h.

$$\sigma_\alpha = \sup_{\substack{z,w \in \mathbb{D} \\ z \neq w}} \frac{|(1-z)^\alpha - (1-w)^\alpha|}{|z-w|^\alpha} < \infty.$$

Hierbei ist, wie üblich, $(1 - z)^\alpha = \exp(\alpha \log(1 - z))$, wobei der Hauptzweig des Logarithmus in der rechten Halbebene genommen wird.

b) Man bestimme $\sigma_\alpha$ explizit.

Raymond Mortini, Metz, F und Rudolf Rupp, Nürnberg, D

**Aufgabe 1384:** Seien $x, y, z$ positive reelle Zahlen, welche der Bedingung $x + y + z = 3$ genügen. Man beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{(x+y)^{2n}}{xy(9-xy)} + \frac{(y+z)^{2n}}{yz(9-yz)} + \frac{(z+x)^{2n}}{zx(9-zx)} \geq 3 \cdot 2^{2n-3}.$$

Oleh Faynshteyn, Leipzig, D

**Aufgabe 1385 (Die einfache dritte Aufgabe):** Die Felder eines $2 \times n$-Gitterrechtecks $R_n$ sind so mit Zahlen aus der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ zu belegen, dass zwei horizontal oder vertikal benachbarte Zahlen nicht beide ungerade sind. Man bestimme die Anzahl $z_n$ solcher Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2018

**Aufgabe 1371.** Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man berechne

$$\lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \sin(a \ln(\tan(ax)))\, dx.$$

Daniel Fritze, Berlin, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 13 Leser haben Beiträge eingesandt: Ulrich Abel (Friedberg, D), Moritz Adelmeyer (Zürich, CH), Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Paul Jolissaint (Porrentruy, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Leser kommen mit einer Substitution und dem Vertauschen von Integral und Grenzwert zum Ziel. Wir folgen den Ausführungen von *Peter Bundschuh*.

Bei festem $a \in \mathbb{R}^*$ ist der Integralausdruck nach der Substitution $y = ax$ gleich

$$\frac{1}{a}\int_0^{\pi/4} \sin(a\ln(\tan(y)))\, dy = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(a\ln(\tan(y)))}{a\ln(\tan(y))} \cdot \ln(\tan(y))\, dy.$$

Weiter strebt für jedes $y \in (0, \pi/4]$ der im Integranden rechts auftretende Quotient bei $a \to 0$ gegen 1. Nach einschlägigen Sätzen der Analysis, etwa dem Lebesgueschen Vertauschbarkeitssatz bei majorisierter Konvergenz, gilt deshalb

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\pi/(4a)} \sin(a\ln(\tan(ax)))\, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y))\, dy.$$

Die Auswertung des hier rechts auftretenden Integrals ist im Prinzip bekannt, soll aber hier noch ausgeführt werden.

Mit der Substitution $t = \tan(y)$ ergibt sich für das uneigentliche Integral rechts

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y))\, dy = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt = \ln(t)\arctan(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\, dt,$$

wobei zuletzt mit partieller Integration der ausintegrierte Beitrag verschwindet. Weiter ergibt sich wegen

$$\frac{\arctan(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1}$$

für alle reellen $t \in [-1, 1]$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\tan(y))\, dy = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}\, dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -C,$$

wobei die alternierende Reihe rechts als Catalansche Konstante bekannt ist.

**Aufgabe 1372.** Wir betrachten reguläre Sechsecke im Raum, d.h. nicht planare Polygone mit 6 Seiten gleicher Länge und gleichen Winkeln zwischen Nachbarseiten.

a) Für welche Winkel existieren solche Sechsecke?

b) Man zeige, dass die Sechsecke symmetrisch sind.

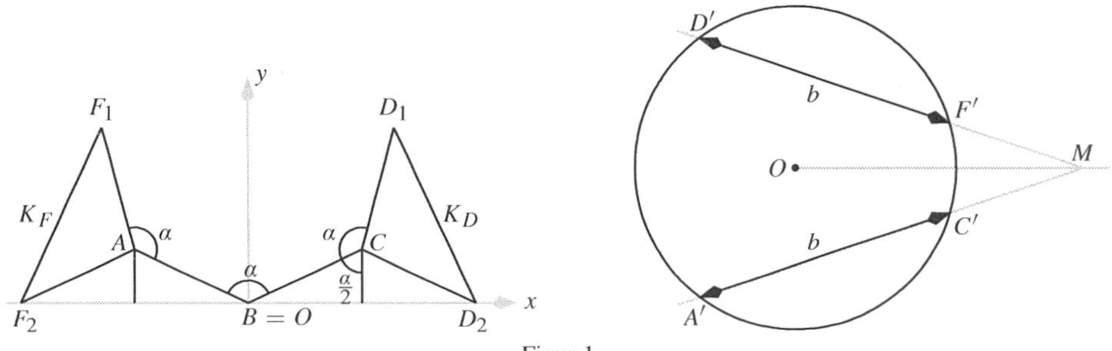
c) Es seien $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ aufeinander folgende Ecken regulärer Sechsecke. Für jede mögliche Symmetriegruppe soll durch Hinzufügen der fehlenden Ecken (Koordinatendarstellung) ein Beispiel angegeben werden.

Karl Wirth, Zürich, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 12 Zusendungen von folgenden Lesern eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Rolfdieter Frank (Koblenz, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Heinz Schumann (Weingarten, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es zeigt sich als ziemlich aufwändig, alle möglichen Konfigurationen solcher Sechsecke anzugeben. Der Autor der Aufgabe gibt noch das Cyclohexan an, dessen sechs Kohlenstoffatome mit Bindungswinkel $\approx 109.5°$ ein solches Sechseck bilden. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*.

In einem regulären räumlichen Sechseck $ABCDEF$ sei $AB = a$, $\sphericalangle(ABC) = \alpha$ und somit $AC = BD = \cdots = 2a\sin(\frac{\alpha}{2}) = b$. Für $\alpha \geq 120°$ gibt es kein solches Dreieck. Seien etwa die Punkte $A$, $B = O$, $C$ in der $xy$-Ebene mit $A$, $C$ symmetrisch zur $y$-Achse und seien $D_1$, $D_2$ die Punkte in der $xy$-Ebene mit $CD_i = a$, $\sphericalangle(BCD_i) = \alpha$, so müsste $D$ auf dem Kreis $K_D$ mit Durchmesser $D_1D_2$ liegen, der senkrecht zur $xy$-Ebene ist (siehe Figur 1 links). Ist $\alpha > 120°$, d.h. $\alpha + \frac{\alpha}{2} > 180°$, so läge $D_1$ und somit $K_D$ rechts von $C$




Figur 1

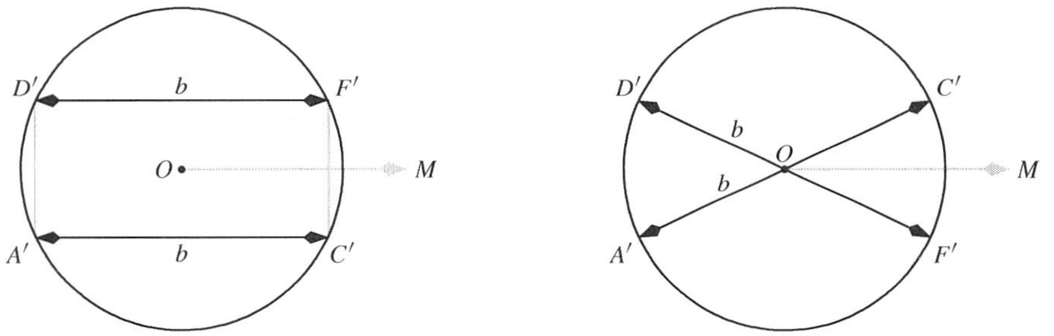
und analog $K_F$ links von $A$. Es wäre $FD \geq x_D - x_F > AC = b$, was natürlich unmöglich ist. Für $\alpha = 120°$ ist $D = D_1$, $F = F_1$ und das Sechseck liegt in der $xy$-Ebene.

Für $\alpha < 120°$ gibt es folgendes Beispiel: $A(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2})$, $B(1, 0, \frac{h}{2})$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2})$, $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$, $E(-1, 0, -\frac{h}{2})$, $F(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$. Man hat $a = \sqrt{1 + h^2}$ und mit dem Cosinussatz ergibt sich $\cos(\alpha) = \frac{h^2 - 1/2}{h^2 + 1}$. Läuft $h$ von $0 \to \infty$, so läuft $\cos(\alpha)$ von $-\frac{1}{2} \to 1$ und $\alpha$ von $120° \to 0°$. Dies zeigt Teil a). Für $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $\alpha = 90°$.

Zu b). Wir legen nun $BE$ auf die $z$-Achse mit $O$ als Streckenmittelpunkt. Wegen $AB = CB = a$, $AE = CE = b$ liegt $AC$ auf dem Durchschnitt der Kugeln $\{P \in \mathbb{R}^3 : BP = a\}$ und $\{P \in \mathbb{R}^3 : EP = b\}$, also auf einem Kreis $K_1$ in einer Ebene $z = c$ und mit Mittelpunkt $(0, 0, c)$ und analog $FD$ auf einem Kreis $K_2$ mit Mittelpunkt $(0, 0, -c)$. (Es gilt $K_1 = K_2$, falls $a = b \Leftrightarrow \alpha = 60°$.) Man projiziert $A$, $C$, $D$, $F$ auf die Ebene $z = 0$ und erhält das in Figur 1 rechts gezeigte Bild.

1. Fall: Ist $AD \neq CF$, so auch $A'D' \neq C'F'$ (die Projektionshöhe ist ja konstant), so dass die Bezeichnungen auf dem Bild gültig sind (man kann $F'$ und $D'$ nicht vertauschen). Eine Rotation um $OM$ um 180° erbringt die Symmetrie $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$ und man erhält als Symmetriegruppe die zyklische Gruppe $C_2$.

2. Fall: $AD = CF$ resp. $A'D' = C'F'$. Dann ist $A'C'F'D'$ ein Rechteck (siehe Figur 2 links), das auch entartet sein darf ($A' = F'$ und $C' = D'$).




Figur 2

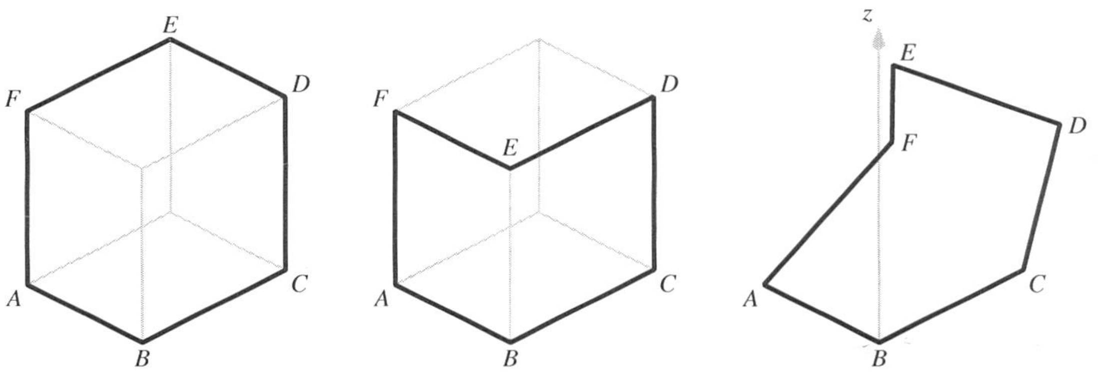
Die Rotation um $OM$ bringt immer noch eine Symmetrie, dazu kommt eine Spiegelung an der Normalenebene zu $OM$ durch $O$: $A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow F$, sowie noch eine Punktspiegelung an $O$: $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow D$. Als Symmetriegruppe erhält man die Kleinsche Vierergruppe $C_2 \times C_2$. Im entarteten Fall ist die Drehachse $OM$ normal zur Ebene $ACDF$, dazu kommt eine Spiegelung an der Ebene durch $OM$ und die $z$-Achse, sowie noch eine Spiegelung an der $xy$-Ebene. Die Symmetriegruppe ist dieselbe wie im nicht entarteten Fall.

Möglich ist auch ein Kreuzmuster (siehe Figur 2 rechts). Man vertauscht $A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow F$ durch eine Rotation um die $z$-Achse, und $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow D$ durch eine Rotation zur Achse, die senkrecht zu $OM$ und zur $z$-Achse ist. Wiederum erhält man die gleiche Symmetriegruppe.

3. Fall: $AD = BE = CF$. Hier kann man die Elemente der Dreiecke $ACE$ resp. $BDF$ beliebig unter sich permutieren. Die Rotation $ACE \to EAC$ entsteht z.B. aus $A \leftrightarrow C$ gefolgt von $C \leftrightarrow E$. Die Vertauschung der Dreiecke ist immer möglich (siehe Fall 1). Die Permutationsgruppe ist die Diedergruppe $D_6$ und hat 12 Elemente.

Zu c). Sei $A(0, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(1, 0, 0)$, d.h. $a = 1$, $\alpha = 90°$, $b = \sqrt{2}$. In der Figur 3 links sind $D(1, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$, $F(0, 1, 1)$ mit $AD = BE = CF = \sqrt{3}$; man hat also den 3. Fall.

In Figur 3 Mitte sind $D(1, 0, 1)$, $E(0, 0, 1)$, $F(0, 1, 1)$ mit $AD = CF = \sqrt{3}$, $BE = \sqrt{1}$ und man hat den 2. Fall (entartetes Rechteck).




Figur 3

Wir wählen noch $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ mit $AE = CE = BE = \sqrt{2}$ und setzen

$$D(1, \cos(\varphi_+), \sin(\varphi_+)), \quad F(\cos(\varphi_-), 1, \sin(\varphi_-)).$$

Damit sind alle Bedingungen ausser $DE = FE = 1$ und $DF = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = 1$ erfüllt. Aus $DE^2 = FE^2 = 1$ berechnet man

$$\cos(\varphi_\pm) = \tfrac{2}{7} \mp \tfrac{\sqrt{18}}{7}, \quad \sin(\varphi_\pm) = \tfrac{\sqrt{24}}{7} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{7}$$

und man erhält $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = \cos(\varphi_+) + \cos(\varphi_-) + \sin(\varphi_+)\sin(\varphi_-) = 1$. Weiter berechnet man $AD^2 = 3 - 2\cos(\varphi_+)$ und $CF^2 = 3 - 2\cos(\varphi_-)$. Also sind $AD$, $BE$ und $CF$ paarweise verschieden und man hat den Fall 1 (Figur 3 rechts).

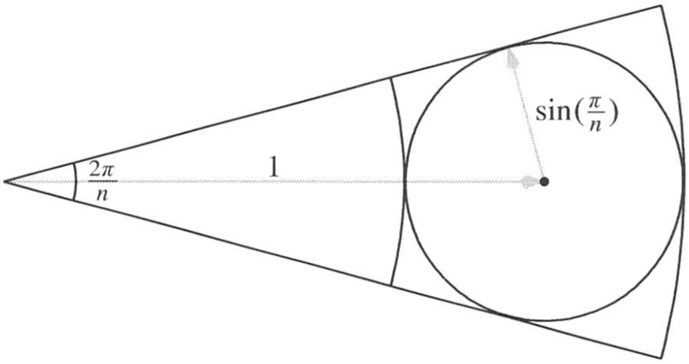
**Aufgabe 1373 (Die einfache dritte Aufgabe).** Einem Kreis $K_0$ wird eine geschlossene Kette von $n$ kongruenten Kreisen $k_0$ eingeschrieben, die alle $K_0$ berühren ($n \geq 3$). $K_1$ sei dann der zu $K_0$ konzentrische Kreis, der alle Kreise $k_0$ berührt. Iteriert man dieses Vorgehen, erhält man unendlich viele Kreise $K_i$ und unendlich viele Ketten mit je $n$ Kreisen $k_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$). Man berechne das Verhältnis $v_n$ der Flächeninhaltssumme aller Ketten zum Inhalt von $K_0$ und $v = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 13 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und Josef Züger (Bonaduz, CH).

Man kann sich die Arbeit ein bisschen erleichtern, wenn man bemerkt, dass man gar nicht die ganze Kreiskette auszurechnen braucht, wie wir es auch bei *Fritz Siegerist*, dessen Lösung wir folgen, schön sehen.

Wegen Ähnlichkeit kann man sich für $v_n$ nicht nur auf einen Sektor mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$, sondern sogar auf einen einzigen Ring-Sektor beschränken.




Figur 4

Mit den Ringradien $1 - \sin(\frac{\pi}{n})$ und $1 + \sin(\frac{\pi}{n})$ und dem Kreisradius $\sin(\frac{\pi}{n})$ erhält man schnell

$$v_n = \frac{\pi \sin^2(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}\left((1+\sin(\frac{\pi}{n}))^2 - (1-\sin(\frac{\pi}{n}))^2\right)} = \frac{n}{4}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Der Grenzwert beträgt

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Bemerkung: Ein Leser gibt an, dass die gleiche Aufgabe als Teil des Problems 1919 von Abdurrahim Yilmaz in *Mathematics Magazine*, Vol. 87, No. 2 (Apr. 2013) erschienen ist.