

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 74 (2019)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 24.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2019 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH-8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1386:** Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $a \neq b$  und Umkreis  $k$ . Die Punkte  $E \in BC$  und  $F \in CA$  seien die Höhenfusspunkte der Höhen  $h_a$  resp.  $h_b$  und  $N$  der Mittelpunkt von  $EF$ . Weiter schneide die Gerade  $CN$  den Umkreis in  $Z$  und  $U$ ,  $V$  seien die von  $Z$  verschiedenen Schnittpunkte  $ZE \cap k$  resp.  $ZF \cap k$ . Schliesslich sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $AU$  und  $BV$ . Zeige, dass sich die Geraden  $UV$  und  $AB$  auf der Tangenten im Punkt  $P$  an den Umkreis des Dreiecks  $CPN$  schneiden.

Andrew Wu, McLean, USA

**Aufgabe 1387:** Es sei für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$S = a + d$  deren Spur und  $D = ad - bc$  deren Determinante. Man stelle für natürliches  $n$  die Spur der Matrix  $A^n$  als Polynom von  $S$  und  $D$  dar.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Aufgabe 1388 (Die einfache dritte Aufgabe):** Die Beziehung

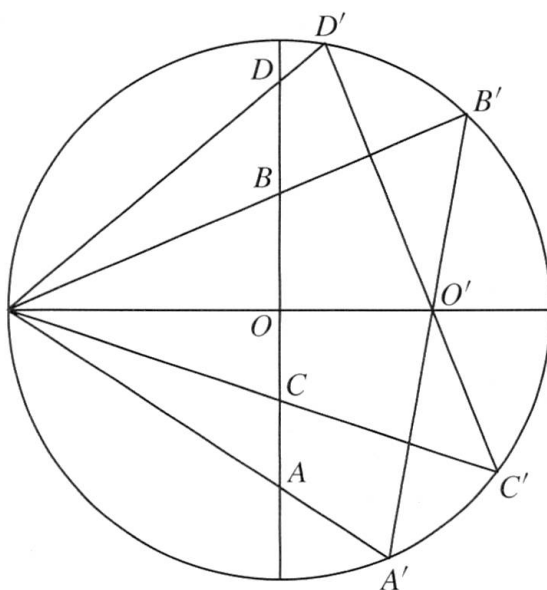
$$A'O' \cdot B'O' = D'O' \cdot C'O'$$

(siehe Figur auf der nächsten Seite) heisst Eukl. III.35 und ist seit über 2300 Jahren bekannt. Weniger populär ist dagegen das ähnliche Resultat

$$AO \cdot BO = DO \cdot CO.$$

Gefragt ist ein möglichst eleganter Beweis, eventuell mit Literaturzitat.

Gerhard Wanner, Genève, CH

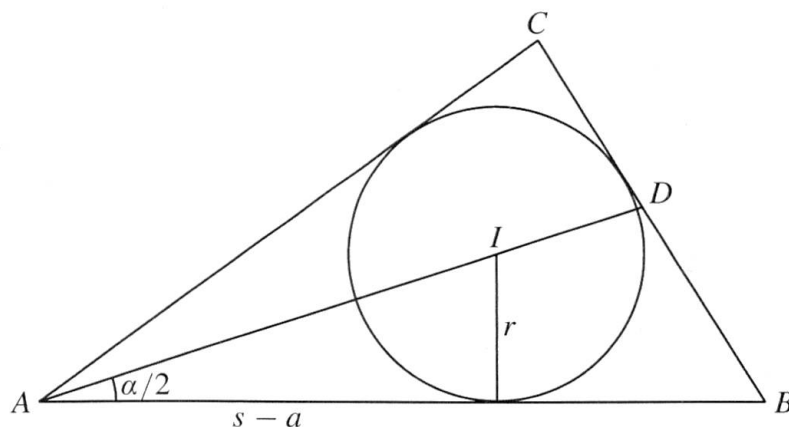


**Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2018**

**Aufgabe 1374.** Im Dreieck seien  $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$  die Winkelhalbierenden und  $R$  und  $r$  der Um- bzw. der Inkreisradius. Beweise die folgende Ungleichung

$$\frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} \geq \frac{1}{2r} + \frac{1}{R}.$$

Martin Lukarevski, Skopje, MK



**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 10 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Volkhard Schindler (Berlin, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Viele geometrische Dreiecksungleichungen lassen sich auf die eulersche Ungleichung  $2r \leq R$  zurückführen. Diesen Weg verfolgt auch *Walter Burgherr*, dessen Lösung wir folgen.

Im Dreieck  $ABC$  mit Seiten  $a, b, c$  seien  $I$  der Inkreismittelpunkt,  $D$  der Schnittpunkt von  $w_\alpha$  mit  $BC$  und  $s$  der halbe Umfang. Nach dem Satz über die Winkelhalbierenden ist einerseits  $CD = \frac{ab}{b+c}$  und andererseits, angewendet mit  $w_\gamma$  auf das Dreieck  $ADC$ ,

$$AI = w_\alpha \frac{b}{b + \frac{ab}{b+c}} = w_\alpha \frac{b+c}{a+b+c} = w_\alpha \frac{2s-a}{2s} = \frac{r}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Daraus erhält man mit  $\frac{r}{s-a} = \tan(\frac{\alpha}{2})$

$$\frac{1}{w_\alpha} = \frac{(2s-a)\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} = \frac{s\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} + \frac{(s-a)\sin(\frac{\alpha}{2})}{2rs} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{2r} + \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{2s}. \quad (1)$$

Der Ausdruck

$$T = \frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{R}$$

soll gemäss Behauptung positiv sein. Nach (1) und durch zyklisches Vertauschen wird

$$T = \frac{1}{2r} \left( \left( \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) - 1 \right) + \frac{1}{2s} \left( \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \right) - \frac{1}{R}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \left( \left( \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \right) - 1 \right) \left( \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \right) \\ &= \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\beta}{2}) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\gamma}{2}) - \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{zyk.}} \sin(\alpha) + \sum_{\text{zyk.}} \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \sum_{\text{zyk.}} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{zyk.}} \sin(\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei die letzten beiden Summen wegen  $\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \cos(\frac{\gamma}{2})$  verschwinden.

Setzt man  $x = \sin(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\beta}{2}) + \sin(\frac{\gamma}{2}) - 1$ , so vereinfacht sich  $T$  wegen (2) und unter Anwendung des Sinussatzes  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = \frac{s}{R}$  zu

$$T = \frac{x}{2r} + \frac{1}{4Rx} - \frac{1}{R},$$

dabei gilt  $x > 0$ . Die quadratische Ungleichung

$$4r \cdot R \cdot x \cdot T = 2Rx^2 - 4rx + r \geq 0$$

ist erfüllt, denn die Diskriminante  $8r(2r - R)$  ist wegen der eulerschen Ungleichung  $2r \leq R$  negativ, ausser im Fall des gleichseitigen Dreiecks für das  $2r = R$  und  $x = \frac{1}{2}$  gilt.

Bemerkung: *Walther Janous* gibt noch an, dass der Faktor  $\frac{1}{2}$  bei  $\frac{1}{r}$  nicht vergrössert werden kann. Ist nämlich  $\frac{1}{w_\alpha} + \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_\gamma} \geq \frac{p}{r} + \frac{q}{R}$ , so ist notwendigerweise  $p \leq \frac{1}{2}$ .

**Aufgabe 1375.** Bestimme alle natürlichen Zahlen, die sich als Summe von paarweise verschiedenen Zahlen der Form  $3^\alpha \cdot 5^\beta$  mit  $\alpha, \beta \geq 0$  schreiben lassen.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 6 Zuschriften von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Herliberg, CH).

Da sich, bis auf endlich viele Ausnahmen, jede natürliche Zahl in der geforderten Weise schreiben lässt, wird man früher oder später mit einem Induktionsbeweis zu Werke gehen. Wir präsentieren die Lösung von *Walther Janous*.

Die zu bestimmende Menge ist  $M = \mathbb{N} \setminus \{2, 7, 11, 22\}$ .

Dass 2, 7, 11 und 22 nicht in  $M$  enthalten sind, ersieht man unschwer aus der „Basis“ 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, ... von  $M$ .

Für  $z \in M$ , also  $z = \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)} \cdot 5^{\beta_j(z)}$  gilt wegen  $3z = \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$ ,  $3z + 1 = 3^0 \cdot 5^0 + \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$  und  $3z + 5 = 3^0 \cdot 5^1 + \sum_{j \geq 1} 3^{\alpha_j(z)+1} \cdot 5^{\beta_j(z)}$ , dass auch  $3z, 3z + 1, 3z + 5 \in M$  und analog auch  $5z, 5z + 1, 5z + 3 \in M$ .

Mit diesen beiden Rekursionen erhält man von 1 ausgehend mit etwas Geduld sofort, dass bis 71 (abgesehen von 2, 7, 11 und 22) alle Zahlen bis auf 34, 38 und 67 Elemente von  $M$  sind. Wegen  $34 = 1 + 3 + 5 + 5^2$ ,  $38 = 1 + 3 + 3^2 + 5^2$  und  $67 = 3 \cdot 5 + 5^2 + 3^3$  sind aber auch diese drei Zahlen in  $M$  enthalten.

Es sei nun  $z \geq 72$ . Mit den drei Fällen

$$z \equiv 0 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n \text{ mit } n \geq 24,$$

$$z \equiv 1 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n + 1 \text{ mit } n \geq 24 \text{ bzw.}$$

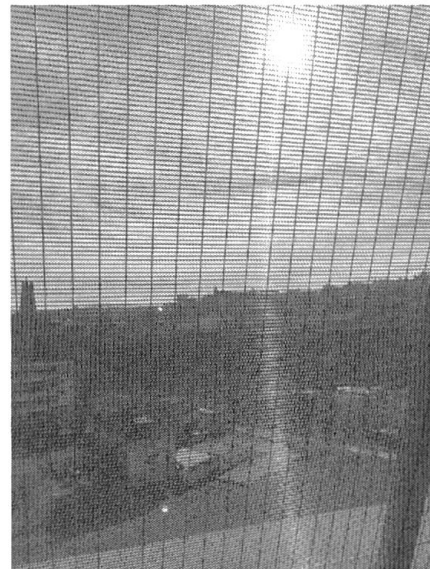
$$z \equiv 2 \pmod{3}, \text{ also } z = 3n + 5 \text{ mit } n \geq 23$$

ergibt sich induktiv, dass  $z \in M$  und wir sind am Ende des Beweises.

**Aufgabe 1376 (Die einfache dritte Aufgabe).** Das nebenstehende Bild entstand auf der Poya-Brücke in Fribourg: Die Sonne scheint durch das Schutzgitter, und ihre Spiegelbilder an den horizontalen Stäben des Gitters bilden eine Kurve, die Teil einer Hyperbel sein könnte.

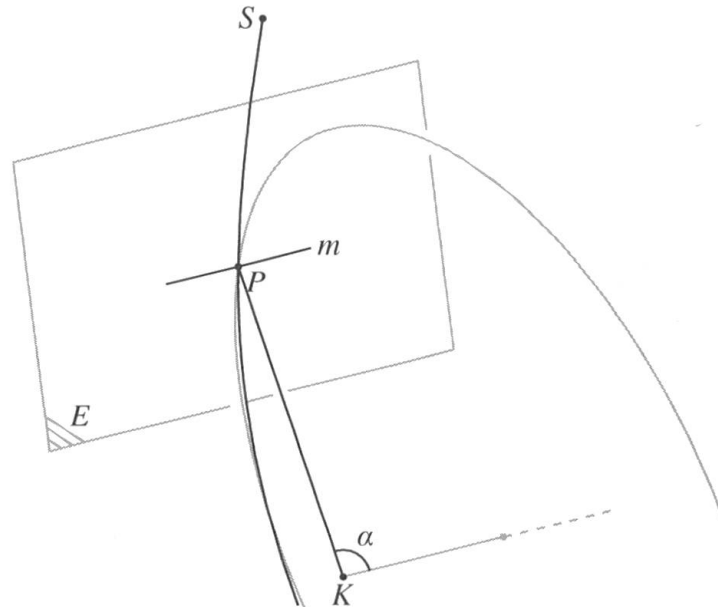
Ist das wirklich eine Hyperbel? Wenn ja, so gebe man die Achse und eine erzeugende Gerade des Kegels an, der diese Hyperbel als Schnitt mit der Ebene des Gitters erzeugt.

Hansklau Rummeler, Fribourg, CH



**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Folgende 5 Leser haben Lösungen eingesandt: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herliberg, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Zwei einfache geometrische Prinzipien: Reflexionsgesetz und Winkel an parallelen Geraden führen hier ziemlich einfach zum Ziel. Wir folgen der Lösung vom *Fritz Siegerist*, der das exemplarisch ausführt.



Ja, es ist ein Ast einer Hyperbel. Die Kegelachse verläuft in Richtung der Gitterstäbe und durch die Kamera. Eine erzeugende Gerade des Kegels ist der direkte Sonnenstrahl in die Kamera.

Die Richtung des einfallenden Lichtes sei weder parallel noch senkrecht zu den Stäben. Je nach Auftreffpunkt  $P$  ist der ausfallende Strahl unterschiedlich gerichtet. Allerdings sind die Winkel zwischen ein- und ausfallendem Strahl und der Zylindermantellinie  $m$  (der Stab ist als dünner Zylinder gedacht) immer gleich gross: Es herrscht eine 2-zählige Dreh-symmetrie (Symmetrieachse normal zur Zylinderoberfläche in  $P$ ). Sämtliche reflektierte Strahlen des Gitters bilden mit den Stäben des Gitters Winkel derselben Grösse  $\alpha$ .

Fällt nun Licht auf ein raumfüllendes Stabgitter, so bilden die reflektierten Strahlen, welche bei der Kamera  $K$  eintreffen, einen Kegelmantel mit Spitze  $K$  und halbem Öffnungswinkel  $\alpha$ .

Die Reflexionspunkte  $P$  liegen somit auf einem Schnitt dieses Kegels mit der Gitterebene  $E$ . Weil diese den Kegel parallel zur Kegelachse schneidet, ist es eine Hyperbel.

Der zweite Ast der Hyperbel hätte Bedeutung für entgegengesetzt einfallendes Licht, d.h. die Sonne stände im Rücken des Beobachters. Steht die Sonne  $S$  hinter dem Gitter, so sieht die Kamera diese immer auf der Hyperbel; es gibt dann eine streifende Fast-Reflexion.