

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (2019)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2020 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1389: In einem Dreieck ABC mit drei verschiedenen langen Seiten a, b, c seien s_a, s_b, s_c die Längen der Seitenhalbierenden, $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ die Längen der Winkelhalbierenden und r der Inkreisradius. Man beweise, dass

$$\frac{1}{s_a^2 - w_\alpha^2} \cdot \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{1}{s_b^2 - w_\beta^2} \cdot \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} + \frac{1}{s_c^2 - w_\gamma^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} < \frac{1}{r^2}.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Aufgabe 1390: Man bestimme den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n/2}}{n^2},$$

wobei $H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x > -1$ die verallgemeinerten harmonischen Zahlen sind.

Daniel Fritze, Berlin, D

Aufgabe 1391 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Felder eines $2 \times n$ -Rechtecks G_n ($n \geq 2$) sind so mit natürlichen (positiven) Zahlen zu belegen, dass die Summe der vier Zahlen in jedem Teilquadrat von G_n gleich sieben ist. Man bestimme die Anzahl z_n der möglichen Belegungen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2018

Aufgabe 1377. Sei k eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu 10 ist, und a_n die Dezimalzahl

$$k \underbrace{111 \dots 1}_n k, \quad (n \geq 1).$$

Man bestimme ein $k \geq 1$ und eine Primzahl p so, dass p alle a_n teilt.

Jürgen Spilker, Stegen, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 13 Lesern und Leserinnen eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Ulrike Bundschuh und Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Während einige Leser sehr direkt auf eine einzelne Lösung zusteuern, versuchen andere, alle möglichen Primzahlen p (und k) zu charakterisieren. Wir folgen der Lösung von *Henri Carnal*.

Sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl, k eine m -stellige Zahl, $a_n = k \underbrace{111 \dots 1}_n k$ und $p \mid a_n$ für $n \geq 0$.

Dann gilt $a_{n+1} - a_n = 10^{m+n}(9k+1)$ und daher wegen $\text{ggT}(p, 10) = 1$ auch $p \mid (9k+1)$. Für $n = 0$ ist $a_0 = (10^m + 1)k$. Daher gilt $p \mid a_0$ genau dann, wenn $p \mid (10^m + 1)$, da wegen $p \mid (9k+1)$ natürlich $p \nmid k$ folgt. So ein m gibt es nicht für alle Primzahlen p , insbesondere nicht für $p = 3, 31, 37, 41, \dots$ (Die zusätzliche Bedingung $p \mid a_0$ ergibt sich aus $p \mid (9k+1) \Rightarrow p \mid (a_1 - a_0) \Rightarrow p \mid a_0$.)

Für $p = 7$ ist $10^3 \equiv_7 10^9 \equiv_7 10^{15} \dots \equiv_7 -1$. Man sucht also eine ungerade, nicht durch 5 teilbare dreistellige Zahl mit $9k+1 \equiv_7 2k+1 \equiv_7 0$ und findet 101, 129, 143, ...

Für $p = 11$ ist $10^1 \equiv_{11} -1$, aber $11 \mid (9k+1)$ besitzt nur die nicht zulässige Lösung $k = 6$. Man wählt daher $m = 3$ und findet $k = 127, 149, 171, \dots$

Bemerkung: *Ulrike* und *Peter Bundschuh* zeigen, dass für eine Primzahl p ein k existiert (und somit unendlich viele), genau dann, wenn die Ordnung von 10 in der multiplikativen Gruppe \mathbb{Z}_p^* eine gerade Zahl ist. Sie zitieren weiter ein Resultat von *H. Hasse*, dass es asymptotisch doppelt so viele Primzahlen mit gerader Ordnung von 10 in \mathbb{Z}_p^* gibt als Primzahlen mit ungerader Ordnung.

Aufgabe 1378. Seien w_α, w_β und w_γ die Winkelhalbierenden eines Dreieck ABC . Spiegelt man einmal A an w_β und zyklisch (B an w_γ etc.) und das andere mal A an w_γ und zyklisch, so erhält man zwei neue Dreiecke. Zeige, dass deren Flächen zusammengezählt der doppelten Fläche des ursprünglichen Dreiecks entspricht.

Raphael Muhr, Oberammergau, D

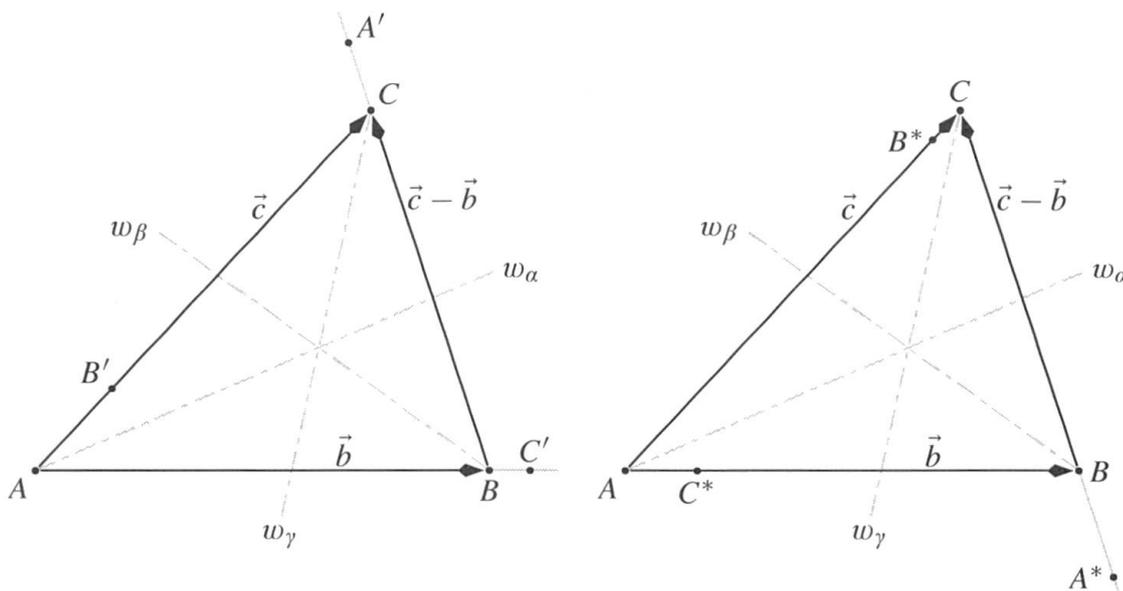
Auswertung der eingesandten Lösungen.

Folgende 12 Leser haben Beiträge zugesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Clemens Pohle (Obersiggenthal,

CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser bestimmen die Flächen der neu entstehenden Dreiecke als Summe von (orientierten) Flächeninhalten von anderen Dreiecken, die sich leicht aus dem Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks bestimmen lassen. Implizit steckt dieses Vorgehen auch im Beweis von *Roland Wyss*, der die Flächeninhalte elegant vektorgeometrisch verpackt.

Die Seitenlängen des Dreiecks ABC seien in der üblichen Weise mit a, b, c bezeichnet und A', B', C' seien die Spiegelpunkte der Ecken A, B, C an $w_\beta, w_\gamma, w_\alpha$ sowie A^*, B^*, C^* die Spiegelpunkte von A, B, C an $w_\gamma, w_\alpha, w_\beta$.



Man hat so $CB' = a, AC' = b, BA' = c$ sowie $BC^* = a, CA^* = b, AB^* = c$ und mittels der Basisvektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ lassen sich die Eckpunkte der neuen Dreiecke wie folgt darstellen (siehe Figur):

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{b} + \frac{c}{a}(\vec{c} - \vec{b}) = (1 - \frac{c}{a})\vec{b} + \frac{c}{a}\vec{c} \quad \overrightarrow{AB'} = (1 - \frac{a}{b})\vec{c} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{b}{c}\vec{b}$$

und

$$\overrightarrow{AA^*} = \vec{c} - \frac{b}{a}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{b}{a}\vec{b} + (1 - \frac{b}{a})\vec{c} \quad \overrightarrow{AB^*} = \frac{c}{b}\vec{c} \quad \overrightarrow{AC^*} = (1 - \frac{a}{c})\vec{b}.$$

Zur Berechnung der beiden Dreiecksflächen benötigt man die Vektoren

$$\overrightarrow{A'B'} = -(1 - \frac{c}{a})\vec{b} + (1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{a})\vec{c} \quad \overrightarrow{A'C'} = -(1 - \frac{c}{a} - \frac{b}{c})\vec{b} - \frac{c}{a}\vec{c}$$

und

$$\overrightarrow{A^*B^*} = -\frac{b}{a}\vec{b} - (1 - \frac{b}{a} - \frac{c}{b})\vec{c} \quad \overrightarrow{A^*C^*} = (1 - \frac{b}{a} - \frac{a}{c})\vec{b} - (1 - \frac{b}{a})\vec{c}.$$

Für die (orientierten) Flächeninhalte der neuen Dreiecke rechnet man dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}) &= \dots = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a})(\vec{b} \times \vec{c}) \\ \frac{1}{2}(\overrightarrow{A^*B^*} \times \overrightarrow{A^*C^*}) &= \dots = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{c} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})(\vec{b} \times \vec{c}). \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass i.a. die Flächen der neuen Dreiecke $A'B'C'$ und $A^*B^*C^*$ voneinander verschieden sind, aber deren Addition zur doppelten Fläche $F = \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{c})$ des ursprünglichen Dreiecks ABC führt.

Aufgabe 1379 (Die einfache dritte Aufgabe). Man bestimme alle Polynome mit reellen Koeffizienten so, dass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$p(x + y) \leq xp(x) + yp(y).$$

Yagub N. Aliyev, Baku, AZ

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 12 Lesern sind Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist und Ueli Suter (Neuchâtel, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Intuitiv ist klar, dass nur das Nullpolynom die geforderte Ungleichung erfüllen kann. Die Lösungsmethoden sind bei fast allen Einsendern insofern identisch, dass sie zeigen, dass die geforderte Bedingung zu unendlich vielen Nullstellen führt. Diese Nullstellen kann man rekursiv bestimmen oder man kann direkt zeigen, dass das Polynom auf einem nicht leeren Intervall verschwinden muss. Wir folgen der Lösung von *Frieder Grupp*, der mit der zweiten Variante arbeitet.

Für $y = 0$ lautet die gegebene Ungleichung

$$p(x) \leq xp(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (x - 1)p(x)$$

und hieraus folgt $p(x) \geq 0$, falls $x > 1$ und $p(x) \leq 0$, falls $x < 1$.

Für $y = x$ lautet die gegebene Ungleichung

$$p(2x) \leq 2xp(x).$$

Aus der oberen Bedingung $p(x) \leq 0$, falls $x < 1$, folgt hieraus $p(2x) \leq 0$, falls $0 < x < 1$. Es ist also $p(x) \leq 0$, falls $0 < x < 2$. Andererseits ist $p(x) \geq 0$, falls $x > 1$ und daher $p(x) = 0$ für $1 < x < 2$.

Da $p(x)$ ein Polynom ist, folgt $p(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Das Nullpolynom erfüllt als einzige Lösung die Ungleichung der Aufgabenstellung.