

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 74 (2019)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 24.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2020 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Grebelackerstrasse 4, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1392:** Durch die Ecke  $A$  eines Dreiecks  $ABC$  ziehe man die Parallele  $\delta'_a$  zur Eulerschen Gerade des Dreiecks. Es sei  $\delta_a$  die zu  $\delta'_a$  symmetrische Gerade bezüglich der Höhe durch  $A$ . Analog werden  $\delta_b$  und  $\delta_c$  definiert. Man zeige, dass die Geraden  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$  sich in einem Punkt schneiden, dessen Abstand zum Höhenschnittpunkt gleich dem Umkreisradius des Dreiecks ist.

Gheorghe Bercea, München, D

**Aufgabe 1393:** Sei  $F_n$  die Fibonacci-Folge, definiert durch  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  und  $g \geq 2$ ,  $k$  seien natürliche Zahlen. Man beweise, dass die Kongruenz  $F_n \equiv n \pmod{g^k}$  unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen  $n$  hat.

Jürgen Spilker, Stegen, D

**Aufgabe 1394 (Die einfache dritte Aufgabe):** Gegeben seien zwei sich in  $P$  und  $Q$  schneidende Kreise  $k_1$  und  $k_2$ . Sei  $g$  die Senkrechte zu  $PQ$  durch  $P$  und  $A$  und  $B$  die von  $P$  verschiedenen Schnittpunkte von  $g$  mit  $k_1$  und  $k_2$ . Sei  $h$  eine weitere durch  $P$  verlaufende Gerade im spitzen Winkel  $\varphi$  zu  $g$  und deren von  $P$  verschiedenen Schnittpunkte mit  $k_1$  und  $k_2$  seien  $U$  und  $V$ . Man zeige  $UV = AB \cos(\varphi)$ .

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2018

**Aufgabe 1380.** Man bestimme die kleinste Konstante  $C$  so, dass für alle Funktionen  $f \in C^1([0, 1])$  mit  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  die Ungleichung

$$C \cdot \int_0^1 f'(x)^2 dx \geq (f(0) + f(1))^2$$

gilt.

Walther Janous, Innsbruck, A

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 14 Lösungen von folgenden Lesern eingegangen: Ulrich Abel und Vitaly Kushnirevych (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong, CHN), Ioannis D. Sfikas (Athen, GR), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungen lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Die einen Löser behandelten die Aufgabe als ein Problem der Variationsrechnung, während die anderen Löser das Problem direkt angingen und die rechte Seite als Ergebnis einer partiellen Integration interpretierten. Wir folgen den Ausführungen von *Ulrich Abel* und *Vitaly Kushnirevych*, die die Aufgabenstellung noch leicht verallgemeinerten.

Unter Beachtung der generellen Voraussetzung  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  liefert partielle Integration

$$\int_0^1 (2x - 1)f'(x) dx = (2x - 1)f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = f(1) + f(0).$$

Anwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung impliziert

$$\begin{aligned} (f(1) + f(0))^2 &= \left( \int_0^1 (2x - 1)f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (2x - 1)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt, falls  $f'(x)$  ein Vielfaches von  $2x - 1$  ist, etwa  $f(x) = x^2 - x + k$ . Die generelle Voraussetzung ergibt  $k = \frac{1}{6}$ , also  $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ . Folglich ist die kleinstmögliche Konstante  $C = \frac{1}{3}$ .

Ersetzt man in obiger Rechnung  $(2x - 1)$  durch  $(a + b)x - a$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$ , so erhält man unter derselben Voraussetzung wie oben die Ungleichung

$$C \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq (af(0) + bf(1))^2$$

mit der kleinstmöglichen Konstante  $C = \frac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)$ . Aufgabe 1380 ist dann der Spezialfall  $a = b = 1$ .

**Aufgabe 1381.** Die Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  eines spitzwinkligen Dreiecks sollen als Achsen der Geradenspiegelungen  $\Sigma_a$ ,  $\Sigma_b$  und  $\Sigma_c$  betrachtet werden. Setzt man diese drei Abbildungen in beliebiger Reihenfolge zusammen, so entsteht eine Schubspiegelung.

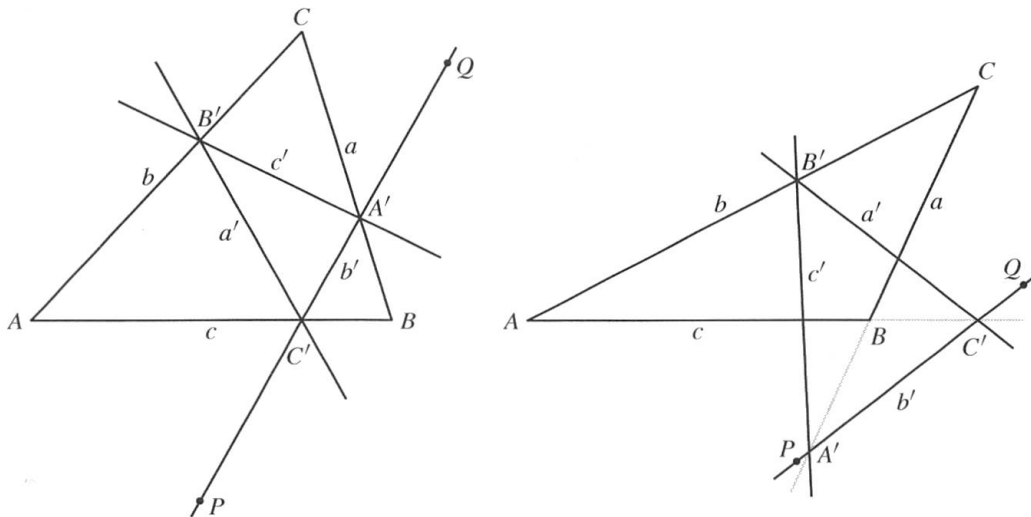
Wo liegen die Achsen der sechs möglichen Schubspiegelungen und wie lang ist der zu der jeweiligen Schubachse parallele Schiebevektor?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 12 Lesern sind Beiträge eingetroffen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Rolfdieter Frank (Koblenz, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Hansruedi Widmer (Baden, CH).

Die Achsen einer Schubspiegelung lassen sich relativ einfach als Fixgeraden dieser Abbildung charakterisieren. Viele Leser arbeiteten mit den Eigenschaften des Höhenfusspunkt-dreiecks, um dann die Aufgabe zu lösen. *Rolfdieter Frank*, dessen Ausführungen wir folgen, wie auch andere Löser deuteten die Länge des Schubvektors ebenfalls mithilfe dieses Dreiecks. Ebenfalls gab er noch die Lösung für stumpfwinklige Dreiecke an.

Die Achsen der 6 möglichen Schubspiegelungen sind die Verbindungsgeraden  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  der Höhenfusspunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des Dreiecks. Dies gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke. Die Länge des Schiebevektors ist für spitzwinklige Dreiecke der Umfang des Dreiecks  $A'B'C'$ . Sie ist  $d(A', B') + d(B', C') - d(C', A')$ , falls der Winkel  $\beta$  stumpf ist (siehe Figur).



Zum Beweis: Bekanntlich halbiert  $a$  einen der Winkel zwischen  $b'$  und  $c'$ ,  $b$  einen der Winkel zwischen  $c'$  und  $a'$ , und  $c$  einen der Winkel zwischen  $a'$  und  $b'$ . Folglich gilt

$$\Sigma_a \circ \Sigma_b \circ \Sigma_c(b') = \Sigma_a \circ \Sigma_b(a') = \Sigma_a(c') = b'.$$

Also muss  $b'$  die Schubachse von  $\Sigma_a \circ \Sigma_b \circ \Sigma_c$  sein, denn jede (echte) Schubspiegelung hat nur diese eine Fixgerade.

Wir setzen  $P = \Sigma_c(B')$  und  $Q = \Sigma_a(B')$ . Dann gilt

$$\Sigma_a \circ \Sigma_b \circ \Sigma_c(P) = \Sigma_a \circ \Sigma_b(B') = \Sigma_a(B') = Q,$$

sowie  $P \in b'$  wegen  $B' \in a'$  und  $Q \in b'$  wegen  $B' \in c'$ . Daher ist die Länge des Schubvektors gleich  $d(P, Q)$ . Ist das Dreieck  $ABC$  spitzwinklig, so gilt

$$d(P, Q) = d(P, C') + d(C', A') + d(A', Q) = d(B', C') + d(C', A') + d(A', B'),$$

weil  $P, C', A', Q$  in dieser Reihenfolge auf  $b'$  liegen. Ist der Winkel  $\beta$  stumpf, so ist die Reihenfolge von  $A'$  und  $C'$  vertauscht, deshalb gilt dann

$$d(P, Q) = d(P, C') - d(C', A') + d(A', Q) = d(B', C') - d(C', A') + d(A', B').$$

Bemerkung: Einige Leser gaben die Länge des Schubvektors in der Form  $\frac{2F}{R}$  an, wobei  $F$  die Fläche und  $R$  der Umkreisradius des Dreiecks  $ABC$  ist. Diese Formel gilt auch im Fall des stumpfwinkligen Dreiecks.

**Aufgabe 1382 (Die einfache dritte Aufgabe).** Sei  $\varphi(\cdot)$  die Eulerfunktion. Für welche  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$a^{\varphi(m)+1} \equiv a \pmod{m}$$

für alle  $a \in \mathbb{Z}$ ?

Rolfdieter Frank, Koblenz, D

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Von folgenden 13 Lesern sind Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Wolfgang Seewald (Biel-Benken, CH), Ioannis D. Sfikas (Athen, GR), Jürgen Spilker (Stegen, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Fast alle Löser benutzen den Satz von Euler–Fermat zur Lösung der Aufgabe. Wir folgen den Ausführungen von *Albert Stadler*.

Wir behaupten, dass entweder  $m = 1$  oder  $m$  quadratfrei sein muss. Der Fall  $m = 1$  ist trivial. Sei

$$m = p_1 p_2 \cdots p_r$$

das Produkt von  $r \geq 1$  paarweise verschiedenen Primzahlen, d.h.  $m$  ist quadratfrei. Sei  $k$  der grösste gemeinsame Teiler von  $a$  und  $m$ . Dann sind  $a$  und  $m/k$  teilerfremd, da  $m$  quadratfrei ist. Wir schliessen, dass

$$\frac{a^{\varphi(m)+1} - a}{m} = \frac{a}{k} \cdot \frac{a^{\varphi(m)} - 1}{m/k}$$

das Produkt zweier ganzen Zahlen ist, da nach dem Satz von Euler  $a^{\varphi(m/k)} \equiv 1 \pmod{m/k}$  und  $\varphi(m) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$  ein Vielfaches von  $\varphi(m/k)$  ist, sodass  $a^{\varphi(m/k)} - 1$  ein Teiler von  $a^{\varphi(m)} - 1$  ist.

Nehmen wir an, dass  $m$  durch das Quadrat einer Primzahl  $p$  teilbar ist, so setzen wir  $a = p$ . Dann ist  $p^{\varphi(m)}$  durch  $p$  teilbar und damit ist  $a^{\varphi(m)+1} - a = p^{\varphi(m)+1} - p$  nicht durch  $p^2$  und damit auch nicht durch  $m$  teilbar.