

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 74 (2019)
Heft: 4

Buchbesprechung: Rezensionen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Rezensionen

Forcing – Eine Einführung in die Mathematik der Unabhängigkeitsbeweise von Dirk W. Hoffmann. 432 Seiten, 34.90€ (Hardcover). Books on Demand, 2018; ISBN 978-3-746-04460-6.

In seinem neuesten Buch zeigt Hoffmann die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese (CH) von ZFC. Dieses Resultat wurde erstmals von Paul Cohen 1963 bewiesen.

Es ist Hoffmanns vordringlichstes Ziel, die komplexe Struktur solcher Unabhängigkeitsbeweise genau darzustellen, und die benötigten Grundlagen möglichst lückenlos einzuführen und zu behandeln. Das erklärt den mit rund 400 Seiten relativ grossen Umfang dieses Buches. Als Leserschaft hat Hoffmann ein mathematisch geschultes Publikum im Auge, d.h. Studierende bzw. Absolventen der Fächer Mathematik, Physik und Informatik, welche sich einen ersten Einblick in das Führen eines Unabhängigkeitsbeweises verschaffen wollen.

Das Buch gliedert sich in acht Kapitel mit den folgenden Schwerpunkten:

1. **Einleitung:** Die Frage, ob CH ein Satz von ZFC ist, wird vorgestellt und ein erster Blick auf mögliche Lösungsansätze geworfen, insbesondere auf die Forcing-Technik.
2. **Mengen:** Das Axiomensystem ZFC wird angegeben, die gängigen Objekte der Mengenlehre wie z.B. geordnete Mengen, Ordinal- und Kardinalzahlen werden definiert und diejenigen Aussagen bewiesen, die später benötigt werden.
3. **Formale Systeme:** Die Syntax und Semantik der Prädikatenlogik (erster Stufe) wird eingeführt, ebenso der Begriff des formalen Beweises. Dazu gibt es einen kurzen Abriss über Modelle der Mengenlehre. Weiter wird der für Unabhängigkeitsbeweise zentrale Begriff der Absolutheit einer Formel besprochen.
4. **Boolesche Algebren:** Neben einer Darstellung der Grundlagen, werden hier Antiketten und generische Filter definiert und der Satz von Rasiowa–Sikorski bewiesen, der besagt, dass in abzählbaren Modellen generische Filter existieren.
5. **Boolesche Modelle:** Zu einem vorgegebenen Modell \mathcal{M} von ZFC und einer (vollständigen) booleschen Algebra B wird die Klasse $\mathcal{M}^{(B)}$ definiert. Anschliessend wird eine mehrwertige Wahrheitsfunktion eingeführt und gezeigt, dass $\mathcal{M}^{(B)}$ ein boolesches Modell von ZFC ist.
6. **Ordinal- und Kardinalzahlen in $\mathcal{M}^{(B)}$:** Es wird die Frage geklärt, durch welche Menge in $\mathcal{M}^{(B)}$ die Ordinal- bzw. Kardinalzahlen in \mathcal{M} repräsentiert werden.
7. **Modelltransformation:** Ausgehend von einem booleschen Modell $\mathcal{M}^{(B)}$ von ZFC und einem generischen Filter G auf B , wird die generische Erweiterung $\mathcal{M}[G]$ definiert und gezeigt, dass es sich dabei um ein Modell von ZFC handelt. Zudem werden Bedingungen an B angegeben, so dass Ordinal- und Kardinalzahlen in \mathcal{M} und $\mathcal{M}[G]$ identifiziert werden können.
8. **Unabhängigkeitsbeweise:** Die Forcing-Ordnung und -Relation wird eingeführt und das Forcing-Theorem bewiesen. Anschliessend werden für ein abzählbares Grundmodell \mathcal{M} von ZFC zwei Forcing-Ordnungen bzw. boolesche Algebren B_1 und B_2 so definiert, dass für die entsprechenden Filter G_1 bzw. G_2 gilt: $\mathcal{M}[G_1]$ erfüllt CH und $\mathcal{M}[G_2]$ erfüllt \neg CH.

Hoffmann versteht es, den Leser zielsicher durch den Beweis der Unabhängigkeit von CH von ZFC zu führen. Das beginnt bei der klaren Deklaration von Absicht und Funktion der jeweiligen Kapitel und setzt sich beim Hervorheben wichtiger Sätze fort. Bei deren Beweis werden die jeweiligen Knackpunkte präzise herausgestrichen

und anschliessend vollständig bewiesen. Letztendlich werden Definitionen mit Beispielen eingeführt und/oder veranschaulicht, und wo das möglich und sinnvoll erscheint, grafisch illustriert.

Zu jedem Kapitel gibt es zudem eine Vielzahl von Übungsaufgaben. Zum einen sind das Aufgaben, welche dem Leser helfen, die eingeführten Begriffe und Konstrukte (besser) zu verstehen und zum andern müssen kleine Beweise geführt werden, welche im Theorieteil weggelassen wurden. Zu allen Übungsaufgaben gibt es ausgearbeitete Lösungsvorschläge auf Hoffmanns Internetseite.

Andreas Haldimann
ZHAW Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

J. Stillwell: Elements of Mathematics. From Euclid to Gödel. 422 Seiten, \$40.00 (Hardback). Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2016; ISBN 978-069117168-5.

Im Jahr 1908 erschien Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* in drei Bänden, ein Kompendium für künftige Gymnasiallehrer, in dem sich Klein das Ziel setzte, die Hochschulmathematik so darzustellen, dass sie für den Unterricht fruchtbar wird, denn sonst bleibe dem Lehrer – wie Klein im Vorwort des ersten Bandes schreibt – „das Hochschulstudium nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat“. Aus Anlass des hundertsten Geburtstags von Kleins Lehrbuch schrieb John Stillwell 2008 einen Artikel, den er schliesslich zu *Elements of Mathematics* ausweitete. Dass ein Buch mit diesem Titel, der sich offensichtlich an Euklids Elemente anlehnt, in unserer gleichnamigen Zeitschrift rezensiert werden muss, versteht sich von selbst.

Stillwell setzt sich das Ziel, *a bird's eye view of elementary mathematics and its treasures* zu liefern, und dies gelingt ihm dank der stilistischen Meisterschaft, die wir uns von ihm gewohnt sind. In *Elements of Mathematics* schenkt uns Stillwell eine Art Quintessenz seiner früheren Bücher, welche der Algebra, der Geometrie, der Logik und der Geschichte der Mathematik gewidmet waren. Unter Elementarmathematik versteht Stillwell einerseits einen Grundstock mathematischen Wissens, der jedem Mathematiker vertraut sein sollte, unabhängig von seiner Ausrichtung. Andererseits sieht Stillwell in philosophischer Weise die Grenze von der elementaren zur höheren Mathematik dort, wo die aktuelle Unendlichkeit gegenüber der bloss potentiellen Unendlichkeit als Konzept zugelassen wird. In diesem Sinne gehören die natürlichen Zahlen noch zur elementaren, die reellen Zahlen bereits zur höheren Mathematik. Diese Grenzziehung mag willkürlich erscheinen, doch Stillwell macht sie in seinem Buch mit diversen Beispielen plausibel.

Stillwell unterscheidet acht Gebiete der Elementarmathematik: Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit, Logik und – als einziges Gebiet, das erst im 20. Jahrhundert relevant wurde – Algorithmik. Jedes dieser Gebiete wird auf anekdotisch aufgelockerte Weise in einem separaten Kapitel dargestellt. Das Kapitel über Kombinatorik beispielsweise beginnt mit der Unendlichkeit der Primzahlen und führt über Eulers Polyedersatz von 1758 in die Ramseytheorie (Lemma von König). Wie jedes Kapitel schliesst auch dieses mit einem Unterkapitel voller historischer Anmerkungen, wo wir z.B. erfahren, dass das Pascalsche Dreieck bereits den Chinesen bekannt war, dann von Tartaglia wiederentdeckt wurde – und zwar „am Aschermittwoch 1523, in Verona“.

Stillwells *Opus summum* sei allen professionellen Mathematikern ans Herz gelegt, doch ist es auch eine empfehlenswerte Lektüre für Gymnasiasten, die sich nicht sicher sind, ob sie Mathematik studieren sollen. Das Buch ist mit gymnasialen Kenntnissen zu meistern, führt jedoch über diese hinaus. Die Mathematik bleibt zwar auf elementarem Niveau, wird aber niemals verwässert. Denn wie Hardy schrieb: *A book on mathematics without difficulties would be worthless.*

Chr. Leuenberger, Fribourg