Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1899)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE des différentielles successives d'une fonction d'une variable

Autor: Fontené, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1248

Dans deux systèmes alliés, ou en affinité, deux figures homologues sont dans un rapport constant. Or le lieu du point d'intersection de deux tangentes du cercle k faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est un cercle concentrique au premier. Donc nous trouvons semblablement que le lieu du point d'intersection de deux tangentes de l'ellipse k_1 faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est une ellipse concentrique homothétique à la première.

Dr G. KILBINGER (Mulhouse).

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1. — Il peut être utile, pour ceux qui abordent l'étude du Calcul différentiel, de représenter géométriquement les différentielles successives d'une fonction d'une variable x : c'est un moyen de fixer dans l'esprit l'hypothèse essentielle que dx est constant à partir de la différentielle seconde. On peut procéder comme il suit.

La fonction $y = f(x)$ étant représentée par une courbe C, menons au point M la tangente MM_0, et traçons MA_0 parallèle à Ox, M_0A_0 parallèle à Oy ; M variant, si l'on suppose

$$MA_0 = \text{const.} = a,$$

M_0 décrit une courbe C_0. Au point M_0 de la courbe C, menons la tangente M_0M_1, et traçons M_0A_1 parallèle à Ox, M_1A_1 parallèle à Oy, en prenant

$$M_0A_1 = MA_0 = a ;$$

M variant, M_1 décrit une courbe C_1. On obtient de même les courbes successives C_2, C_3,... On a alors au point M, dx étant a,

$$\begin{cases} dy = A_0M_0, \\ d^2y = A_1M_1 - A_0M_0, \\ d^3y = A_2M_2 - 2\,A_1M_1 + A_0M_0, \\ d^4y = A_3M_3 - 3\,A_2M_2 + 3\,A_1M_1 - A_0M_0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Pour le voir, on prend un point M' voisin de M sur la courbe C ; on considère les points M'_0, M'_1, M'_2..., et les points A'_0, A'_1, A'_2... ; on désigne par I_p le point où la parallèle à Oy menée par M'_p est coupée par la paralèlle à Ox menée par M_p, et l'on a les points I, I_0, I_1, I_2... La formule $dy = A_0M_0$ étant évidente, on procède de proche en proche. Si l'on suppose par exemple *la formule exacte* pour d^3y, cette fonction de x a une dérivée, limite du rapport

$$\frac{(A'_2M'_2 - A_2M_2) - 2\,(A'_1M'_1 - A_1M_1) + (A'_0M'_0 - A_0M_0)}{MI};$$

le numérateur est égal à

$$(I_2M'_2 - I_1M'_1) - 2\,(I_1M'_1 - I_0M'_0) + (I_0M'_0 - IM')$$

ou

$$I_2M'_2 - 3\,I_1M'_1 + 3\,I_0M'_0 - IM';$$

le rapport peut s'écrire

$$\frac{I_2M'_2}{M_2I_2} - 3\,\frac{I_1M'_1}{M_1I_1} + 3\,\frac{I_0M'_0}{M_0I_0} - \frac{IM'}{MI},$$

et la limite, ou la dérivée de d^3y, est

$$m_3 - 3\,m_2 + 3\,m_1 - m_0,$$

m_0, m_1,... étant les coefficients angulaires des tangentes MM_0, M_0M_1... ; on a donc la formule ci-dessus pour d^4y, qui est par définition la différentielle de d^3y, ou le produit par a de la dérivée de cette fonction.

2. — A propos de représentations géométriques, on peut observer ceci. Dans la démonstration du théorème des fonctions

composées, pour le cas où l'on a $y = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de la variable x, il est utile de considérer la surface $Y = f(U, V)$, U et V étant ici deux variables indépendantes, avec trois axes OU, OV, OY. On interprète les dérivées partielles par les sections $V = v$, $U = u$. La fonction y de la variable x est représentée par une courbe gauche, intersection de la surface précédente et du cylindre $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. On suit bien la démonstration sur la figure.

3. — Puisque je parle de Calcul différentiel, j'indiquerai en terminant un moyen d'alléger un peu dans la forme la démonstration de la formule de Taylor. Après avoir écrit l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{R},$$

qui définit le nombre R, on peut dire : considérons deux variables x et y liées par la relation

$$x + y = a + h,$$

et soit la fonction de la variable x

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \ldots + \frac{y^n}{n!} f^n(x) + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{R};$$

cette fonction est égale à $f(a+h)$ pour $x = a$, d'où résulte $y = h$, et elle prend la même valeur pour $x = a + h$, d'où résulte $y = 0$; donc, dans les conditions connues, sa dérivée est nulle pour $x = a + \theta h$. Or cette dérivée est, à cause de $y' = -1$,

$$\frac{y^n}{n!} \left[f^{n+1}(x) - \mathrm{R} \right];$$

donc on a

$$\mathrm{R} = f^{n+1}(a + \theta h).$$

G. Fontené (Paris).