

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1899)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MATHÉMATIQUES EN ESPAGNE
Autor: Galdeano, Z.-G. de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1214>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES MATHÉMATIQUES EN ESPAGNE

Pour présenter un aperçu de l'enseignement actuel des Mathématiques en Espagne, il est préalablement nécessaire de faire une rapide excursion historique, en remontant au commencement de ce siècle.

C'est aujourd'hui un fait acquis que, dès le xvii^e siècle, la décadence scientifique de l'Espagne se fit sentir, tandis qu'en France, en Italie, en Angleterre, Descartes, Viète, Wallis et d'autres commençaient une renaissance si brillante.

Le manque d'idéalisme relégua nos scientifiques dans les applications, qui ne donnent guère issue à des découvertes ; l'utilitarisme prédominant ne produisit que des praticiens, et des ouvrages d'application à la Navigation, à l'Astronomie, etc.

Au commencement du xix^e siècle seulement furent importés les ouvrages classiques destinés à l'enseignement, entre autres la traduction de la Géométrie descriptive de Monge, celle des ouvrages de Lacroix, la Géométrie de Legendre et les ouvrages espagnols de Bails, Vallejo, parmi lesquels il faut citer les élégantes *Instituciones de calculo diferencial é integral* de D. Josef Chaix, qui furent suivies pour l'éducation mathématique de la jeunesse ; plus tard prédominèrent les ouvrages de Bourdon, Vincent, Cirotte, Lefebure de Fourcy, Legendre, etc.

Dès la deuxième moitié du siècle actuel, quelques ouvrages spéciaux donnèrent une certaine variété à la culture scientifique en Espagne.

Le professeur D. Juan Cortazar, à l'Université de Madrid, publia ses estimables ouvrages élémentaires et aussi son *Complemento de Algebra y Geometría analítica*, et le professeur Elizalde sa *Geometría descriptiva* ; D. José Echegaray, professeur à l'École

de *Ingenieros de Caminos canales y puertos*, donna une traduction libre d'un ouvrage de Trudy, *Memoria sobre la teoria de las determinantes* (1868) et un intéressant mémoire sur la Thermodynamique.

En 1865, parut un ouvrage remarquable par l'originalité des vues, et surtout par l'organisme philosophico-mathématique qu'il présentait. Le professeur de logique de l'*Instituto del Noviciado* de Madrid ⁽¹⁾, M. Rey y Heredia, attiré vers l'étude des quantités imaginaires par son collègue M. Vallin, professeur de mathématiques élémentaires, en donna une interprétation très intéressante, fondée sur la division des jugements, due à Kant, dans ses états positif, négatif et limitatif, sous la catégorie de la qualité.

M. Rey admet, avec Kant, l'espace et le temps comme des formes de l'intuition empirique des phénomènes du monde extérieur et intérieur. L'intuition de l'espace dans sa pureté nous est représentée comme une capacité infinie, simultanée et homogène, ainsi que celle du temps comme une série infinie d'instant successifs et transitoires.

L'Algèbre réalise l'harmonie et l'union de l'Arithmétique et de la Géométrie, au moyen de l'interprétation des résultats négatifs et imaginaires des questions mathématiques ; elle est une branche nouvelle qui subordonne les deux autres à son universalité.

Les affections qualitatives correspondent aux directions perpendiculaires, parallèles et obliques des droites ; la théorie géométrique de la position, *desideratum* de Leibniz, s'est transformée en une théorie algébrique ordinaire, dès l'instant où a été établie la correspondance de signe avec toutes les positions de la droite dans le plan.

La nature positive, négative et imaginaire des quantités n'est que la réalisation du concept logique de la catégorie, de la qualité, imposée par l'entendement.

L'Arithmétique et la Géométrie dépouillent les quantités de leurs propriétés physiques, conservant leurs propriétés numériques ou extensives. L'Algèbre, ensuite, les purifie encore en les soumettant au pur concept de quantités, avec une qualité nécessaire.

(1) Aujourd'hui du *Cardenal Cisneros*.

A l'inclusion ou à l'exclusion du concept du sujet dans le concept du *prédicat*, correspondent les jugements positifs et négatifs; et quand nous rapportons le sujet, non à la circonscription intérieure du prédicat, mais à la circonscription externe, c'est-à-dire quand nous rapportons *indirectement* le sujet à un prédicat, nous trouvons les quantités *indirectes* ou imaginaires, qui dérivent ainsi des jugements limitatifs de Kant.

Il faut admettre des quantités possédant ensemble les deux qualités positive et négative, en correspondance avec le nouveau concept de *limitation* de l'entendement.

L'ouvrage de M. Rey y Heredia constitue un développement des théories exposées déjà par Argand, Français, Vallès, Faure, etc., soumis aux concepts de la philosophie kantienne sur les formes du jugement, mais avec une méthode d'exposition très heureuse, dont nous pourrions exprimer l'importance en citant les matières : exposition mathématique des concepts de qualité, selon l'interprétation géométrique; les quantités imaginaires considérées comme racines; correspondance du module et de l'argument aux catégories de la quantité et la qualité; l'interprétation de l'imaginaire dans les coniques, où l'on tire profit de la théorie de Poncelet sur les coniques supplémentaires.

Dans l'exposition des imaginaires sous l'algorithme de la somme, l'auteur donne des relations intéressantes sur les sommes *catégorématiques* (ou suivant le seul concept de quantité) et les sommes *sincatégorématiques* (suivant les deux concepts de la quantité et la qualité, simultanément).

L'algorithme de la production (multiplication), suivant M. Rey, repose sur la réciprocité des facteurs dans son rapport par antithèse, terme moyen entre la substance et la cause, correspondant aux algorithmes de la somme et de la graduation, selon Wronski.

En outre, M. Rey donne quelques développements originaux sur la contraposition des facteurs dans la multiplication des quantités imaginaires et la multiplication ternaire.

Ses aperçus et rapprochements philosophiques sur la graduation sont d'une grande originalité.

Il utilise très habilement la théorie de l'ordre, selon la pensée de Poincaré, pour exposer la théorie des équations binomes, la

propriété reproductive des racines de l'unité, la composition des irradiations des équations d'ordre inférieur dans celles d'ordre supérieur, et aussi la considération, qu'il appelle dynamique, des racines imaginaires; et la théorie trigonométrique de l'imaginaire permet des représentations élégantes qui conduisent aux constructions graphiques.

La formule $a = \left(1 + \frac{y}{\infty}\right)^x$ de Wronski lui sert dans la graduation infinie, et il termine en développant le nombre e , qualitatif qui appartient à la graduation infinie sincatégorématique et à la théorie des quantités imaginaires et complexes.

En résumé, l'ouvrage de M. Rey y Heredia comprend trois idées principales : 1° le symbole de la perpendicularité, selon Buée et Argand; 2° la pensée de Pascal, *les nombres imitent l'espace, malgré la différence de nature*; 3° le tableau des catégories de l'entendement indique tous les *moments* d'une science spéculative projetée, et donne son ordonnance et son régime.

L'influence de l'ouvrage de M. Rey se fit sentir dans d'autres ouvrages espagnols.

D. José Rochano y Alemany, professeur à l'institut de Grenade, dans ses *Elementos de Algebra* (1870) donna une grande importance à la représentation géométrique des imaginaires, distinguant les deux éléments, qualitatif et quantitatif, dans les opérations du calcul, et développant avec quelque étendue les résultats publiés par M. Rey, qui sont des conséquences de ce qu'on trouve dans l'ouvrage d'Argand sur la représentation géométrique des symboles $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ et $(\sqrt{-1})^{\cos \mu} + \sqrt{-1} \sin \mu$.

De son côté le professeur D. Luciano Navarro, à l'Institut de Salamanca, appliqua la représentation géométrique des quantités imaginaires à l'exposition de sa *Geometria elemental* (1874).

Il est vrai qu'en représentant la droite inclinée par l'imaginaire binôme et sa grandeur par le module de celle-ci, on arrive à une traduction des raisonnements géométriques en raisonnements algébriques; mais cela forme une géométrie analytique de la géométrie élémentaire. Cette méthode permet d'ailleurs à M. Navarro d'exposer à la fois la Trigonométrie et la Géométrie.

Les *Elementos de Geometria analitica* du directeur de l'École de marine D. Modesto Dominguez Hervella (1879) forment un

ouvrage très digne d'attention, par la manière originale d'exposer cette science, basée sur l'interprétation géométrique des quantités imaginaires.

Les notions préliminaires sont destinées aux représentations des quantités et des opérations algébriques; l'auteur emploie la forme binaire pour la représentation des droites dans le plan, utilise la double égalité des termes réels et imaginaires dans les équations obtenues, arrive aux formules de Maclaurin et de Moivre, à l'expression au moyen de module et de l'argument, et aux logarithmes; et tout cela lui permet d'exposer la Géométrie dans le plan avec unité dans la méthode et une certaine originalité dans les procédés.

Dans la Géométrie de l'espace, M. Dominguez Hervella démontre que l'imaginaire double $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ est l'expression analytique d'une unité absolue prise dans la direction perpendiculaire à celles qui sont adoptées pour l'unité réelle et l'imaginaire simple $i = \sqrt{-1}$, et il obtient la représentation ternaire $OM = a + bi + ci'$ d'un vecteur dans l'espace, s'approchant de la représentation de Hamilton; dans le symbole $e^{i(\varepsilon' + i\varepsilon'')}$ l'exposant $\varepsilon' + i\varepsilon''$ exprime non seulement le nombre ε de fois que e^i entre comme facteur (c'est-à-dire le module $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}$), mais encore la manière d'entrer et le plan où s'est produite l'évolution potentielle.

L'exposition de cette deuxième partie est faite par analogie avec celle de la première, d'après l'étude des opérations de l'Algèbre dans l'espace, ce qui rend l'ouvrage très intéressant.

A cette occasion, je me bornerai à citer mes deux mémoires présentés à l'Académie des sciences de Madrid dans les concours de 1878 et 1879, *l'Exposition historique et didactique de la théorie des quantités imaginaires* et *Sur l'Algèbre historiquement et critiquement considérée*, dont j'ai repris le sujet dans des ouvrages ultérieurs, spécialement dans ma *Critica y sintesis del Algebra* (1888).

En 1881, D. Apolinar Fola ⁽¹⁾ donna une autre exposition remarquable, philosophique et mathématique, corrigeant quel-

(1) Il ne faut pas confondre M. Apolinar Fola avec D. José Fola, auteur de la *Moderna ciencia geometrica*, écrite contre les principes de la science admise.

ques conclusions de M. Rey, ouvrage très intéressant, complété en 1891 par un deuxième volume où il tenta d'interpréter les quantités complexes dans l'espace.

M. Fola obtint ainsi le symbole $(\rho + \sigma\sqrt{-1}) \Pi(p)$, qui exprime un résumé de Géométrie sphérique; mais s'il arrive à des conclusions intéressantes, la démonstration rigoureuse de ses principes lui manque; cependant l'ouvrage reste très estimable. M. Fola signale l'erreur de M. Vallès sur l'expression $e^{-\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$.

Un autre ouvrage important, malgré les nombreux travaux publiés sur cette théorie, est celui de M. Lasala, *Teoria de las cantidades imaginarias* (1894), écrit consciencieusement avec rigueur de méthode; il y a introduit un travail digne d'étude, notamment dans les théories des nombres e et E , dans la graduation pour le cas de l'exposant imaginaire d'une quantité imaginaire, et pour celui de l'unité plus un élément infinitésimal réel ou imaginaire; ceci conduit aux logarithmes dans les systèmes de bases E et $\sqrt{-1}$; ces considérations l'ont amené à un autre ouvrage: *Generacion de las cantidades imaginarias por graduacion infinita y estudio de un genero de curvas llamado Hetoide* (1896).

Il y a une trentaine d'années, l'illustre ingénieur des ponts et chaussées à Madrid, M. Echegaray, aussi brillant dans la Mathématique et la Physique que dans la littérature dramatique, commença un autre développement d'idées.

M. Joseph Echegaray publia son *Introduction à la Geometria superior*, faisant connaître en Espagne la méthode de Chasles, fondée sur le rapport anharmonique, avec l'élégance et l'originalité de style qui accompagnent tous ses ouvrages.

A ce livre succédèrent, quelque temps après, d'autres mémoires et ouvrages de professeurs espagnols, pour la préparation de la jeunesse aux études spéciales au corps du génie; parmi eux nous citerons ceux de M. Cavestany, du P. Obeso et la *Geometria elemental*, dans laquelle j'expose, selon les conclusions de Chasles, la dérivation de la doctrine des porismes d'Euclide et des lemmes de Pappus qui forme cette branche géométrique. Il faut ajouter que les excellents *Appendices* de la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse ont rendu de grands services aux besoins de l'enseignement chez nous.

Il est bon de rappeler ici un ouvrage publié par le professeur à l'Institut de Bilbao, D. Atanasio Lasala, la *Teoria de las lineas proporcionales* (1880).

M. Lasala croit avoir découvert un nouveau principe fondamental de la science géométrique ; mais on le trouve dans l'ouvrage de M. Catalan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, déduit du théorème de Menelaüs et de celui de Desargues sur les triangles homologues ; l'énoncé de cette proposition est le suivant : *Si trois droites, issues d'un même point O, rencontrent en A, B, C, et A', B', C', deux transversales, on a :*

$$\frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AO}{A'O} = \frac{CA}{C'A'} \cdot \frac{BO}{B'O} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CO}{C'O}.$$

M. Lasala fait application de ce principe fondamental aux théories des transversales, des rapports anharmonique et harmonique, à l'homographie, à la Trigonométrie et à la Géométrie sphérique.

Ce progrès dans la Géométrie, commencé par M. Echegaray, coïncida avec un autre qui amena l'introduction, dans les programmes de l'École des Ingénieurs de *Caminos canales y puer-tos*, à Madrid, de l'Algèbre des formes, donnant de la sorte occasion de faire connaître en Espagne les ouvrages de Salmon, et spécialement ceux du maître italien M. Rubini, dont la *Théorie des formes* fut traduite en espagnol par le professeur à l'université de Séville D. Emilio Marquez (1885).

Quelques ouvrages parurent en Espagne sur cette branche de la science mathématique. Il faut citer les traités sur les déterminants de MM. Bacas y Escandon et Fernandez de Prado ; la *Combinatoria* de MM. Suarez et Gascó, professeurs à l'Institut et à l'Université de Valence, livre estimable par sa clarté et sa rigueur didactique ; les *Eléments de la théorie des formes* de D. Luis Octavio de Toledo, professeur à Madrid (1889).

La théorie des formes n'a pas été le seul développement qui fit sortir les professeurs espagnols de l'étude de l'Algèbre d'après la résolution numérique des équations, selon les découvertes dues à Descartes, Newton, Rolle, Lagrange, Budan, Fourier, Sturm, etc.

D. Miguel Merino, directeur de l'Observatoire astronomique de Madrid, publia une traduction libre du mémoire écrit en

allemand par l'astronome M. Encke, c'est-à-dire l'ouvrage : *Resolucion general de las ecuaciones numericas por el método de Gräffe* (1879), faisant ressortir les avantages de cette méthode sur la méthode classique.

L'Académie des sciences de Madrid publia (1877) l'ouvrage couronné de l'astronome D. Elogio Jimenez où sont exposés les principaux résultats de Gauss, Dirichlet et Dedekind sur cette branche ; en outre, D. Cecilio Jimenez Rueda, à présent professeur à l'Université de Valence, publia ses *Prolegómenos de Aritmética universal* (1889), d'après l'exposition faite par M. le professeur Otto Stolz dans ses *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*.

Un autre ouvrage très intéressant fut publié par le commandant d'infanterie D. Ricardo Vazquez Illa : *Propriedades elementales relativas à la divisibilidad de los números enteros* ; ce travail mérita un rapport favorable de l'Académie des sciences de Madrid, ainsi que ceux de MM. Rey, Fola, Dominguez Hervella et Lasala.

Pour ne pas interrompre l'exposition des progrès faits parmi nous dans les théories algébriques, il faut citer à présent les *Disertaciones matematicas sobre la cuadratura del circulo, el método de Wantzel y la division de la circunferencia en partes iguales* par D. José Echegaray, insérées dans le volume XXII de la *Revista de los progresos de las Ciencias*, publiée jusqu'à ces dernières années par l'Académie des sciences de Madrid. Plus tard, M. Echegaray forma de ces théories un beau volume où l'on trouve le développement des travaux de MM. Hermite et Lindeman qui conduisent à la démonstration de l'impossibilité de la quadrature du cercle avec la règle et le compas ; M. Echegaray fait aussi quelques applications de la méthode de Wantzel et donne les raisonnements qui facilitent la compréhension de celle-ci.

Il faut citer encore, de cet illustre savant, sa remarquable *Resolucion de las ecuaciones y teoria de Galois* (1897), d'après ses conférences données à l'athénée de Madrid l'année passée ; il y présente aussi une brillante exposition de la théorie des substitutions, rehaussée par un style qui appartient en propre à cette riche imagination, mise au service d'un esprit si puissant et si profond.

Le savant professeur de Géométrie descriptive à l'Université

centrale, D. Eduardo Torroja, fut l'initiateur d'un autre progrès dans la Mathématique.

Partisan enthousiaste des méthodes de Staudt, de Fiedler et de Culmann, c'est-à-dire de la Géométrie dans toute sa pureté et dégagée des vêtements de l'Analyse, il introduisit, il y a une vingtaine d'années, la Géométrie de Staudt à l'Université de Madrid; il succédait alors, dans la chaire de Géométrie descriptive, au professeur Elizalde, qui laissa incomplète la publication d'un élégant traité de Géométrie descriptive, dont l'achèvement est dû à son collègue D. Gurmersindo Vienna, enlevé à son tour, il y a dix ans, à la science et au professorat espagnols.

M. Torroja, partisan des études graphiques, publia son beau volume *Geometría projectiva* et approfondit l'étude des éléments à l'infini, aussi bien dans cet ouvrage, que dans son profond discours d'entrée à l'Académie des sciences de Madrid : *Reseña de los medios empleados por la geometría pura actual para alcanzar el grado de generalidad y de simplificación que la distingue de la geometría antigua* (1893), où l'on trouve un résumé très utile de la Géométrie moderne dans ses traits les plus importants.

A ce propos, nous croyons juste de citer encore l'ouvrage de l'élève distingué de M. Torroja, aujourd'hui professeur à l'Université de Madrid, D. Miquel Vegas. Cet estimable professeur, partisan comme M. Torroja des idées de Staudt et Fiedler, publia en 1894 son *Tratado de Geometría analítica* d'après le style et l'allure de Clebsch, Briot et Bouquet, d'Ovidio et Fiedler. Il adopta aussi les idées du professeur italien Dott. Giulio Lazzeri, développées dans son *Trattato di Geometria analitica* (1893).

M. Vegas a introduit dans les cours de nos Universités la Géométrie analytique projective; il poursuit à présent, en collaboration avec M. Torroja, la publication d'une autre Géométrie, d'après les vues indiquées.

Le professeur à l'Université de Valence D. Cecilio Jimenez Rueda a contribué aussi à répandre parmi nous ces études, en publiant son *Tratado de las formas geometricas*; s'il accorde une grande importance aux résultats qu'on doit à Staudt et Culmann, il harmonise dans son ouvrage cette tendance géométrique avec celles de Chasles et de Steiner.

Dans l'enseignement de la Géométrie analytique, aux ouvrages

de Lefebure de Fourcy, Sonnet et Frontera, et Cirotte, ont succédé ceux, plus modernes, de MM. Salmon, Carnoy, de Longchamps, Imber et Wiell, et le petit traité espagnol du professeur à l'Université, décédé il y a quelques années, D. Ignacio Sanchez Solis. De même, à l'ancien traité d'Analyse de Navier succédèrent, dans nos Facultés des sciences, ceux de MM. Duhamel, Sturm et C. Jordan, et aussi les *Principios fundamentales del Cálculo diferencial* du regretté et très estimable professeur à l'Université centrale D. Simon Archilla ; à l'Université de Barcelone furent mis en usage les *Elementos de Cálculo diferencial* du professeur D. Lauro Clariana. Les écoles militaires spéciales suivirent le traité de Calcul différentiel et intégral du lieutenant D. Fernando Garcia de san Pedro, les *Elementos de Cálculo hitegral* du colonel du génie D. Antonio Torner et, actuellement, le traité écrit par le général du génie D. Diego Ollero. Nous citerons également les brochures du professeur à l'Université de Saragosse D. Gabriel Galan sur *Las funciones hiperbolicas, El triangulo infinitesimal* et l'intéressant mémoire du professeur à l'école de *Ingenieros de caminos* D. Antonio Portuondo : *Ensayo sobre el infinito* (1880).

Chez nous, le défaut d'une tradition scientifique nationale n'a pas permis de développer la science dans sa partie technique ; seulement, dans les réceptions des membres de l'Académie des sciences et dans les inaugurations des cours académiques, elle s'est développée dans sa partie formelle ou sa conception philosophique.

Le professeur de philosophie à l'Université de Madrid D. Francisco Giner, dans son ouvrage *Estudios filosoficos y religiosos* (1876) publia une traduction du mémoire du philosophe Krause sur le concept et les divisions de la Mathématique, et le professeur D. Ramon Hermida donna la traduction du petit ouvrage qu'écrivit le Portugais D. I. N. Conceiro da Costa, *Filosofia de las Matématicas y reflexiones pedagógicas sobre la enseñanza de esta asignatura* (1875), qui constitue un précis de la doctrine philosophico-mathématique de Wronski.

Dans mes brochures, *Observaciones útiles en el estudio de las Matemáticas* (1874), *El método aplicado à la ciencia matemática* (1875) *Consideraciones acerca de un nuevo plan para la enseñanza*

de las matemáticas elementales (1877), la Mathématique est étudiée principalement sous son aspect formel, logique et pédagogique. Là sont exprimées la dérivation du problème qui produit le théorème, l'importance de l'étendue des hypothèses et des thèses dans la réciprocity et l'enchaînement scientifique, conduisant à classer les questions d'après leur nature ; la dérivation des méthodes dans la Mathématique, d'après la méthode générale de la Philosophie ; le besoin de trouver un *pourquoi*, supérieur aux raisonnements mathématiques, ce qui conduit à la critique mathématique ; et dans ce but, la première édition de la Géométrie élémentaire que je publiai (1882) contient une section critique où l'on étudie la méthodologie géométrique, la structure des propositions, les méthodes particulières dérivées des méthodes générales, les substitutions des propositions d'après leur équivalence, les méthodes d'exposition en face de celles d'invention. La question de l'existence ou de la possibilité des figures, et leur génération d'après les déterminations et les corrélations, sont étudiées aussi dans la brochure *Complemento de la Geometria elemental ó critica geometrica* (1881) avec application aux problèmes, selon les équivalences ou transformations mutuelles au moyen des substitutions de conditions équivalentes.

Le but pédagogique a dirigé la composition des divers ouvrages dont je présente un aperçu.

J'ai exprimé dans le *Tratado de Aritmética* (1884) la nécessité de constituer une philosophie mathématique qui expose le criterium de la vérité mathématique, une littérature mathématique qui organise le monde de la beauté mathématique, et une pédagogie mathématique qui harmonise les lois de l'exposition scientifique avec la nature de notre intelligence ; et dans l'impossibilité d'y parvenir d'un seul coup, j'ai réparti le travail dans divers ouvrages.

Notre Arithmétique réduit le nombre concret au nombre abstrait par la considération des systèmes de numération. La théorie du nombre-facteur se rapporte à l'idée de contenance, celle du nombre-reste entre dans la féconde idée des congruences ; dans cette théorie, on a comme principes fondamentaux les théorèmes de Fermat et d'Euler, qui régissent la périodicité et conduisent à la formation du nombre par des séries

et aux criteriums de divisibilité dans tous les systèmes de numération.

Le *Tratado de Algebra elemental* est écrit sous l'influence des doctrines de Wronski au commencement du siècle ; mais aussi en profitant de la prédominance des théories combinatoires introduites par Boole et Grassmann, lesquelles donnent de nouvelles allures à la science ; elles ont amoindri la portée des vues philosophiques du célèbre mathématicien philosophe Wronski, dont le travail synthétique n'obtint pas la faveur qu'il méritait ; cela tient sans doute à ce que la Mathématique aspire toujours à se délivrer des exclusivismes des systèmes philosophiques.

La combinatoire se détachant de l'Algorithmie et dirigeant celle-ci, les algorithmes transcendants impliquant l'idée de l'infini, ou de l'imaginaire ; c'est là une heureuse distinction de Wronski. Les équations se présentent comme des moments de la génération des quantités et conduisent aux algorithmes inverses par leur résolution. La généralisation successive des concepts des quantités et des opérations permet d'harmoniser ce que nous posons dans une question, ou l'élément subjectif, avec ce qui forme la nature de l'objet ou matière de nos investigations ; cette généralisation justifie en outre l'adjonction de nouveaux êtres, dans un domaine où s'expliquent les anomalies qui existent dans des domaines inférieurs⁽¹⁾. Tout cela rentre dans le plan de notre Algèbre élémentaire, où nous avons cherché l'enchaînement des idées dans le but de former un organisme.

La branche supérieure de l'Algèbre, tranchée en deux divisions, appartenant aux concepts de continuité et de combinaison, s'élève d'une part à la théorie des fonctions de variables complexes, selon la théorie de Cauchy ; d'autre part aux principes combinatoires des substitutions, qui régissent la formation des fonctions, et conduisent à la résolution des équations, d'après les méthodes de Lagrange, Abel et Galois, ce que nous avons annoncé pour la troisième partie de l'Algèbre (non publiée).

Mais dans cette étude directe de l'Algèbre, qui forme son exposition didactique, on en rencontre une autre, qui dirige

(¹) Tout cela est développé dans la brochure *El concepto del imaginario en la ciencia matemática*.

les raisonnements et signale les diverses allures de la science.

L'ouvrage *Critica y sintesis del Algebra* (1888) répond à cet ordre d'idées.

Kummer, et Dedekind avec ses nombres idéaux et ses idéaux, ont enrichi les domaines explorés par Gauss.

La continuité est étudiée dans les fonctions, notamment depuis Cauchy.

La qualité obtient sa représentation sensible par les travaux d'Argand, Mourey, Faure, Vallès ; sa théorie s'agrandit dans le mémoire *Sur les quantités géométriques* de Cauchy et arrive à la double périodicité représentée dans les travaux de Liouville et d'Hermite ; et la quantité complexe parvient à sa représentation dans la surface de Riemann. Mais la discontinuité acquiert une importance supérieure dans les travaux de MM. Darboux, Weierstrass, Dedekind, Cantor, du Bois-Reymond, où est aussi étudiée la continuité dans de très diverses circonstances ; on y rencontre tout ce qui a conduit aux développements modernes sur les singularités dans les fonctions et dans les courbes ou les surfaces.

D'autre part, la combinatoire progresse à partir de la nouvelle étendue du concept d'opération, due à Boole et à Grassmann ; elle trouve un vaste champ d'application dans l'Algorithme des formes développé par Cayley et concrété par Hamilton et par Grassmann.

D'autre part, Carnot, Poncelet, Cournot, Duhamel, etc., ont expliqué les anomalies des résultats des équations dans leurs rapports avec les données imposées *a priori* dans les énoncés des problèmes.

Et, après que Vandermonde eut créé l'Algorithme des substitutions, perfectionné par Cauchy, la théorie des équations algébriques fut édiflée sur cette base par Lagrange, Abel et Galois.

Un autre ouvrage plus élémentaire, *Problemas de Aritmética y Algebra*, nous a permis de faire une synthèse de l'Arithmétique dans le livre premier, contenant les principes généraux de la méthodologie ; cela nous conduit à une classification des problèmes de l'Algèbre élémentaire ; nous terminons par l'exposition des principes généraux de la technie algébrique, où, d'après les rapports entre la réalité du monde physique et les concepts intellectuels, nous arrivons aux discussions des problèmes, à la corres-

pondance entre les concepts de nombre et d'étendue, en utilisant les conceptions de Carnot sur les systèmes corrélatifs pour les appliquer aux corrélations algébriques.

La deuxième édition de notre Géométrie (1888), s'est accrue des principes de la Géométrie de Chasles, fondée sur le rapport anharmonique, ou le double rapport des Allemands; cette branche forme une continuation des éléments d'Euclide, comme Chasles le démontra dans son ouvrage *Les trois livres de porismes d'Euclide*, en les rétablissant d'après les lemmes de Pappus; nous donnons une grande importance dans notre ouvrage à cette dépendance qui permit à l'illustre géomètre français d'édifier sa nouvelle Géométrie sur les travaux du géomètre grec; mais nous croyons utile et juste d'exposer aussi les principes de la méthode de Staudt qui traduit en constructions graphiques le rapport anharmonique de Chasles.

La Géométrie étant si riche en raison de la variété de ses méthodes qui suggèrent des manières différentes d'opérer pour parvenir au même but, nous avons fait aussi une exposition, non seulement historique, mais critique et didactique, des principaux systèmes géométriques; euclidien, trigonométrique, barycentrique (de Möbius); celui des projections (de Poncelet), rapport anharmonique (de Chasles); de la projectivité des formes harmoniques (de Staudt). Et, parmi les méthodes analytico-géométriques, nous signalons celles d'Argand, de Bellavitis, de Hamilton et de Grassmann, tout ce qui fait l'objet de notre *Géométrie générale*, ainsi que les Géométries non euclidiennes dans leurs traits fondamentaux, sans négliger la nouvelle branche élémentaire appelée *Géométrie du triangle*, qui a enrichi la littérature mathématique à ce point de vue, grâce aux travaux de mathématiciens français, anglais et allemands.

Ces importantes généralisations de la Géométrie qui arrivent jusqu'à la Géométrie n -dimensionnelle, sont aussi exposées dans notre brochure *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrias euclideas y et concepto de Hiper-espacio* (1896), mais avec une plus haute généralisation. En effet, ces théories sont étudiées non seulement dans la Géométrie, mais aussi dans l'Algèbre à n unités complexes de Weierstrass et Dedekind, et dans les Algèbres symboliques de

Peiree et de Cayley ; enfin, et surtout, les récents travaux de MM. Lie, Klein et Poincaré, nous ont permis de présenter un précis des principes fondamentaux de la théorie des groupes de transformations, où le concept fécond de la projectivité a sa plus haute portée.

Nous avons exposé avec trop d'étendue peut-être le contenu de nos propres ouvrages ; c'est que ceux-ci sont soumis à un plan pédagogique et non purement *expositif*. C'est ce dernier point de vue qui domine dans la majorité des œuvres écrites pour la préparation de la jeunesse dans un but déterminé, et non pas avec la préoccupation de la culture mathématique générale.

Quelques travaux sur divers sujets mathématiques ont été publiés dans plusieurs recueils.

La *Revista de los progresos de las ciencias*, publié jusqu'à une époque qui remonte à une vingtaine d'années, contient quelques travaux très intéressants de M. Echegaray sur la théorie de la lumière, le déterminisme mécanique de M. Boussinesq, et sur l'électro-statique et l'électro-dynamique, dans lesquels ce savant a montré sa fécondité et ses vues originales sur ces sujets. Ce Recueil contient aussi l'exposition des travaux géodésiques dirigés par le regretté général D. Carlos Ibañez. Les revues techniques *Memorial de Artilleria*, *Memorial de Ingenieros*, *Revista de Obras publicas*, *Annales de la Construcción* ⁽¹⁾ contiennent des travaux de mathématiques appliquées à diverses professions techniques, et quelques travaux de Mathématiques pures. De même les anciennes revues : *Revista de los profesores de Ciencias*, publiée il y a une vingtaine d'année à Madrid, et la *Crónica científica*, publiée à Barcelone, consacrée principalement aux sciences physiques, chimiques et naturelles, ont inséré quelques articles sur les Mathématiques ; mais la seule Revue, ayant pour objet la Mathématique pure est le *Progreso matematico*, publié depuis 1895, avec la collaboration de très distingués mathématiciens et ayant un caractère international.

A cette Revue succédèrent, pour une courte période : *El Aspirante*, publié à Tolède, destiné principalement à la jeunesse qui se prépare aux études spéciales, et *El Archivo matematico*.

(1) Ce dernier Recueil a cessé de paraître.

La création de quelques cours de Mathématiques à l'Athénée de Madrid tend à favoriser les études mathématiques parmi nous.

M. Echegaray a terminé son remarquable cours sur la *Resolución de las ecuaciones y teoría de Galois*, qu'il a publié, ainsi que nous l'avons déjà dit. Le savant professeur et ingénieur D. Eduardo Saavedra a commencé aussi un cours sur la *Historia de las matematica desde su origen hasta la época de Newton*; et nous avons donné, cette année, un cours sur *La moderna organización de la Matematica*, comprenant un précis sur les théories : des nombres, des Géométries euclidiennes et non-euclidiennes, et de la Géométrie à n dimensions comprenant l'*analysis situs*; sur les Algèbres ordinaire, symbolique, des formes et de la logique; sur la théorie des fonctions de variables complexes; sur la théorie des groupes de transformation; et sur l'unification des concepts de la Mathématique dans le siècle actuel.

Ce que nous venons d'exposer résume ce qui a été fait en Espagne dans les diverses branches mathématiques.

Des réformes capitales s'imposent dans les Facultés des sciences, et on doit attendre une nouvelle organisation sur une meilleure base pour que les progrès se fassent sentir.

Il faut reconnaître la nécessité de distinguer les hautes spéculations mathématiques, qui conviennent à l'Université, des Mathématiques étudiées, par leurs applications, dans les écoles spéciales; et cette confusion a empêché, à notre avis, un plus rapide développement de ces études parmi nous. C'est ce que nous avons exposé déjà dans notre mémoire *La enseñanza de la ciencia matematica en la Universidad*, publié dans le tome IV du *Progreso matematico*.

Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
