

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1904)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** BIBLIOGRAPHIE

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

kopische Doppelsterne (2 st.); Methode der kleinsten Quadrate (1 st.). — SCHRAM: Kalendariographie und Umrechnung von Daten verschiedener Zeitrechnungen (2 st.). — M. HERZ: Die Störungen der Rotationsachse der Erde (2 st.). — G. JÄGER: Prinzipien der Mechanik (2 st.). — A. LAMPA: Elementare Mechanik (2 st.).

Durant le semestre d'hiver 1903-1904) l'Université de Vienne a compté 5906 étudiants réguliers et 1832 auditeurs parmi lesquels 90, respectivement 131 dames; la fréquence est donc au total de 7738.

Zurich, *Ecole polytechnique, section normale des sciences mathématiques* (18 avril; 4 août). — HIRSCH: Integralrechn. 4, Repetitorium 1, Uebg. 2; Funktionentheorie 4. — FRANEL: Calcul intégral 4, Rép. 1, Exerc. 2. — HERZOG: Mechanik I, Rep I, Uebg. 2. — M. FIEDLER: Darst. Geometrie 2, Rep. 1, Uebg. 4; Zentralprojektion und Zyklographie 2; Elemente d. analyt. Geom. der Lage, 2. — LACOMBE: Géométrie descriptive 2, Rép. 1, Exerc. 4. — GEISEG: Analyt. Geometrie II, 2; alg. Flächen 4. — HURWITZ: Alg. Gleichungen 4; Fourier'sche Reihen 2. — ROSENMUND: Vermessungskunde 5, Rep. 1; Uebg. 1 tag. — WOLFER: Geogr. Ortsbestimmung 3; Uebg. im ast. Beobachten 3; Einl. in die Astrophysik.

Zurich, *Universität* (12 April; 30 Juli 1904). — BURKHARDT: Alg. Analysis, 3; Differential-und Integralrechnung II, 2; Partielle Differentialgleichungen der Physik, 3; Mathematisches Seminar, 2. — WEILER: Darstellende Geometrie, mit Uebungen, II. Teil, 3; Synthetische Geometrie (Forts.), 2; Analyt. Geometrie, II, 3; Politische Arithmetik mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2. — E. GUBLER: Inhalt und Methode des geometrischen Unterrichts in der Mittelschule, 2.; Algebraische Analysis mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2, Politische Arithmetik mit Uebungen (für Lehramtskandidaten), 2. — A. WOLFER (v. ci-dessus, Ecole polytechnique).

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

G. ROBIN. — **Œuvres scientifiques.** Réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par L. RAFFY. *Thermodynamique générale.* Un vol. XVI-271 p.; Gauthier-Villars, Paris, 1901.

La Thermodynamique générale, ou la science des équilibres et des modifications de la matière, et dont un cas particulier est la mécanique classique qui n'étudie que les équilibres de position et les déplacements, forme le

second volume des Œuvres scientifiques de Robin. M. Raffy, en profitant de divers matériaux laissés par Robin et de quelques leçons professées à la Sorbonne a reconstruit, avec des éléments fort épars, l'œuvre profondément originale de Robin.

Cette Thermodynamique générale s'éloigne beaucoup de l'exposition presque traditionnelle; Robin expose des idées si nouvelles et sous une forme si originale, qu'on ne saurait en quelques pages, donner qu'une idée bien imparfaite de son ouvrage. Ces idées ont en France un apôtre en M. Duhem dont les travaux sur la Thermodynamique, sur l'évolution de la mécanique présentent bien des points de contact avec les idées de Robin.

L'introduction, reproduite d'après la leçon inaugurale au cours de Chimie-physique, jette d'ailleurs aussitôt beaucoup de lumière sur les idées de Robin. Le but de la science étant de connaître le nombre des phénomènes prévus et de les prévoir avec une précision égale à celle de nos procédés d'observation, nous ne pouvons l'atteindre qu'avec l'induction. Donc la méthode inductive est la seule rationnelle. Au contraire on a toujours cherché à procéder par déduction, comme on a fait dans presque toutes les théories mécaniques ou de physique mathématique. Robin est donc anti-mécaniste et c'est à peine s'il reconnaît les mérites de ces théories pour la constitution de la science. Et dans le cours du livre il est toujours aux prises avec la mécanique classique; il va jusqu'à dire que le procédé habituel de la science consiste à traduire des mots par des équations. Il n'est pas même de l'école de Gibbs; il veut absolument écarter toutes les méthodes qui tendent à déterminer les phénomènes par des considérations « à priori » mécaniques, analytiques, etc., pour ne se tenir qu'à l'induction. Pour cela il veut formuler des inductions de manière qu'elles soient susceptibles de vérification directe et qu'elles soient encore énoncées par des lois intégrales; car il veut s'interdire toute hypothèse portant sur l'infiniment petit. Il ne raisonne que sur des opérations réalisables et n'introduira que des grandeurs accessibles à l'expérience: ce n'est pas tout; il bannit les mots d'énergie, d'entropie, de force: concept vague et obscur qui doit être substitué par celui bien plus précis de travail qu'accompagne le déplacement de poids. On trouvera cela, peut-être, un peu excessif. Mais il est bien certain qu'après avoir fait « tabula rasa » les reconstructions ne laisseront subsister aucune indétermination, aucune obscurité ?

Un système de poids est un système  $S_1$ , composé par des solides indéformables, fluides incompressibles, etc., dont les parties mobiles sont bien polies, et qui ne peut éprouver d'autre modification qu'un changement de configuration. Considérons un autre système  $S$  placé dans une source, corps de masse très grande par rapport à  $S$  et dont l'état est complètement déterminé par sa température, qui, seule, peut changer, et qui recueillera ou fournira toute la chaleur qu'il pourra mettre en jeu. Supposons  $S$  en relation avec  $S_1$ , avec lequel il ne peut changer de chaleur; enfin ces deux systèmes ainsi que les sources qui les entourent forment une partie de l'univers complètement isolée. A deux états d'équilibre de  $S$  correspondent deux autres de  $S_1$ , qui diffèrent par le déplacement de certains corps extérieurs. Soient:  $P$  le poids de l'un des corps déplacés;  $z_0$  et  $z_1$  les coordonnées du centre de gravité ( $z$  est vertical, dirigé en bas); alors le travail mis en jeu dans le passage du premier au second état est exprimé par

$$T = \Sigma P(z_1 - z_0) .$$

Il est bien vrai que dans quelques cas particuliers, il est facile de former le système  $S_1$ ; mais on doit avouer qu'on ne voit pas bien si ce concept nouveau a sur l'ancien de plus grands avantages de précision et de clarté. S'étant donné, pourra-t-on lui faire toujours correspondre (construire)  $S_1$ ? Cette définition une fois admise (Robin a soin de faire voir sa coïncidence avec celle de la mécanique seulement en quelques cas), il est vrai, les choses se passent très bien et avec généralité.

Si  $S_1$  est de même nature que  $S$ , rompons ses communications avec  $S$  et mettons-le en relation avec un système de poids  $S_2$ , de manière qu'il puisse passer exactement par les mêmes états et dans les mêmes conditions de temps que quand il était en relation avec  $S$ . Une fois cette possibilité admise (Robin ne la démontre pas), soit  $T_1$  le travail consommé par  $S_1$ , suivant la définition déjà donnée, dans le passage de  $A$  à  $A'$ ; alors celui de  $S$  est, par définition,  $-T_1$ , pourvu que l'on prouve que si  $S$  est mis en relation directe avec un autre système de poids, il consomme précisément un travail  $-T_1$ .

Cette preuve est donnée après avoir établi le principe de Mayer sur l'équivalence de la chaleur et du travail. C'est ici, selon nous, que commence la partie la plus originale et fort intéressante de Robin.

Dans le principe de Mayer il distingue deux parties : le principe du cycle fermé et celui de l'état initial et final. Dans le premier, un système en équilibre subit, sous l'action d'un système de poids une série de modifications qui le ramènent à son état initial, en consommant un travail égal à la somme des quantités de chaleur qu'il a dégagées dans les diverses sources, multipliées par l'équivalent mécanique de la chaleur; dans le second, si un système dans deux processus qui l'amènent à deux états d'équilibre consomme les travaux  $T$  et  $T'$  et dégage les quantités  $Q$  et  $Q'$  de chaleur, alors

$$T - JQ = T' - JQ' .$$

Ce second principe est essentiellement différent du premier auquel il peut être réduit dans le cas des phénomènes *renversables*; c'est-à-dire quand il est possible de le ramener à son premier état au prix d'un travail égal et de signe contraire à celui qu'a mis en jeu la transformation directe.

De ces deux principes on peut déduire non seulement le théorème sur le travail, mais encore on peut démontrer les principes de Mayer lorsque  $S$  est en relation avec un système quelconque.

Le chapitre III est destiné à la notion si fondamentale de réversibilité. Soit un système  $S$  qui, mis en relation avec  $S_1$ , passe d'un état initial d'équilibre à un état final en traversant des états intermédiaires aussi nombreux que l'on voudra et soit  $T$  la somme algébrique des travaux mis en jeu dans chaque étape.

Supposons qu'en mettant  $S$  en relation avec  $S'_1$  on puisse le faire repasser, en sens inverse, par ces mêmes états intermédiaires, et soit  $T'$  le travail total mis en jeu dans cette seconde transformation. Les deux transformations sont *réversibles* si  $T + T'$  tend vers zéro, lorsque le nombre des états intermédiaires augmente indéfiniment; une transformation ne sera jamais considérée comme réversible, tant que ne sera pas indiqué la composition et le mode d'agir des deux systèmes étrangers  $S_1, S'_1$ ; l'un déterminant la *production* du phénomène; l'autre effectuant sa *réversion*. Une opération réversible doit s'effectuer avec une extrême lenteur; une modification réversible est renversable.

La distinction essentielle de deux principes de Carnot est, croyons-nous, de Robin. Le premier principe affirme que lorsqu'un système, primitivement en équilibre, a parcouru un cycle de transformations qui le ramènent à son état initial, ce système n'a pu produire de travail que s'il a échangé de la chaleur avec deux sources au moins. S'il a échangé de la chaleur avec une source ou avec aucune (cycle monothermique) alors  $T \geq 0$ , et si le cycle est réversible  $T = 0$ .

Le second principe dit que dans tout cycle monothermique irréversible il y a consommation de travail.

Ce second principe est bien distinct du premier dans lequel n'intervient pas la notion de réversibilité et il est énoncé de manière à être directement vérifiable par l'expérience; et s'il n'intervient que pour une faible partie dans l'établissement des relations fondamentales de la Thermodynamique, il constitue, à lui seul, le fondement de la statique générale.

Robin avec rigueur et élégance sait déduire beaucoup de conséquences; l'une des plus importantes est que le travail est un invariant des transformations thermiques réversibles; ou, le travail isothermique réversible est un invariant.

C'est ici vraiment qu'aurait dû se placer la notion de potentiel interne d'un système qui se rattache précisément aux modifications isothermiques. En effet le travail d'un système est la différence des valeurs que prend une certaine fonction, déterminée à une fonction près de la température absolue; c'est le potentiel interne de Massieu, ou thermodynamique de Helmholtz et de M. Duhem, identique à celui des forces intérieures de la mécanique classique.

L'application, bien simple, à la recherche du potentiel isothermique des corps isotropes élastiques et la recherche des conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  de Lamé avait été déjà indiquée par Beltrami. Après avoir défini le potentiel externe et total, on est conduit à la condition générale de l'équilibre isothermique stable (potentiel total minimum) et à la démonstration du théorème célèbre de Lagrange-Dirichlet, par des considérations d'équilibre seulement, ce qui n'est pas possible, comme on sait, dans la statique classique.

D'après les principes de Carnot nous ne pouvons affirmer qu'un cycle monothermique décrivant un cycle au cours duquel il fait varier la température de deux sources, doit emprunter de la chaleur à la source *chaude* et en céder à la *froide*. Or, en étudiant les cycles où les modifications isothermiques s'alternent avec des modifications adiabatiques et en s'appuyant sur un fait expérimental relatif à l'hydrogène, on peut *démontrer* ce principe pour le corps thermométrique avant tout (hydrogène) et puis pour un système quelconque.

Les applications nombreuses à la chimie; à la théorie de la pile; aux gaz parfaits et aux déformations permanentes, montrent la grande généralité des principes exposés. Un seul chapitre est dédié à la dynamique générale. Robin est toujours fidèle à sa méthode: l'extension du principe de l'équivalence, lui fournit, après l'introduction des variables intrinsèques normales, l'équation fondamentale. Par différentiation on déduira les équations différentielles de la Dynamique qui peuvent s'interpréter d'une façon tout à fait semblable à celle de la mécanique classique.

Un dernier chapitre contient quelques résultats obtenus par Robin au commencement de sa carrière scientifique.

Le livre est écrit avec une extrême clarté et on peut le lire sans avoir des

connaissances trop étendues en Analyse. M. Raffy en publiant la partie maîtresse de l'œuvre scientifique de Robin a rendu un véritable service à la Science.

R. MARCOLONGO (Messine).

C. BURALI-FORTI. — **Lezioni di Geometria metrico-proiettiva.** (*Biblioteca matematica*, vol. X.) — Un vol. gr. in-8°, 308 p.; prix : L. 8. — ; Bocca frères, Turin, 1904.

Ce nouveau livre de M. le prof. Burali-Forti n'est pas une reproduction de l'« *Introduction à la Géométrie différentielle* » (Paris, 1897); en effet, celle-ci ne parlait qu'incidemment de la méthode de Grassmann et de ses applications à la Géométrie différentielle, tandis que le nouveau livre contient un exposé très complet de cette méthode et toutes les applications fondamentales à la Géométrie projective et à la Géométrie métrique. Mais l'ancien traité est encore très utile dans une première préparation : il peut servir comme introduction au traité plus complet que nous allons analyser.

Un avertissement est avant tout nécessaire : on ne doit pas croire que ce traité s'adresse seulement à ceux qui sont en possession de nombreuses connaissances mathématiques ; non, car il ne demande que la connaissance de la géométrie élémentaire, de l'algèbre, des premiers éléments du calcul différentiel. De plus l'auteur a voulu conserver aux propositions leur forme habituelle, ce qui contribue à faciliter la lecture du livre : il a dû faire une exception à propos des énoncés qui se rapportent à l'homographie (transformation projective), car il l'a considérée explicitement comme opération qui transforme les éléments d'une figure  $a$  dans ceux d'une figure  $b$  et non comme opération unique qui peut indifféremment s'appliquer à la première et deuxième figure.

Le livre se divise en *cinq parties*. Dans les deux premières on trouve les points fondamentaux de l'algorithme géométrique de Grassmann : après avoir étudiés les sommes et les produits de points et vecteurs, on en fait des applications à l'étude des coordonnées cartésiennes et polaires et à l'analyse de quelques-unes des courbes les plus importantes, sans excepter l'hélice circulaire et les courbes tracées sur le tore. L'étude des formations géométriques (qui permettent d'exprimer linéairement toute transformation par des transformations fixes) et de leurs coordonnées donne comme application la Géométrie analytique cartésienne, et son algorithme, consistant uniquement dans la recherche d'équations de points, droites, plans, lignes, surfaces, etc., quoique virtuellement contenu tout entier dans le livre, n'y reçoit aucune application, car la méthode de Grassmann permet d'introduire directement les *notions* géométriques dans les calculs.

La notion de position (*posit a*, notation qu'on doit lire *position* (positio) de  $a$ ) permet (n° 43) de définir très simplement les éléments projectifs point, droite et plan. La loi de dualité énoncée sous une forme plus précise que d'ordinaire (49-51), découle directement des lois de dualité des formations, qui sont les suivantes :

*Pour l'espace* : de toute propriété des formations exprimable en les reliant uniquement par les opérations somme, produit par un nombre, produit progressif ou régressif, on conclut toujours une nouvelle propriété par le changement des  $F_1$  dans<sup>1</sup> les  $F_3$ , des  $F_3$  dans les  $F_1$ , laissant fixes les  $F_2$  et  $F_4$  (nombres).

<sup>1</sup>  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , formes projectives de 1<sup>re</sup>, 2<sup>me</sup>, etc. espèce.

*Pour le plan projectif*: le principe de dualité dans le plan subsiste si on change les  $F_1$  dans les  $F_3$ , les  $F_2$  dans les  $F_1$  et les  $F_3$  (nombres) dans les  $F_2$ .

*Pour les éléments projectifs*: de toute propriété de position des éléments projectifs point, droite, plan, on peut déduire une nouvelle propriété par le changement de point en plan, de plan en point, de droite en droite, lorsque au lieu de dire *il passe par* on dira *il est sur*, et réciproquement.

Les homographies projectives dans les faisceaux et dans les ponctuelles sont traitées dans la troisième partie et on en fait un usage très remarquable dans l'exposition de la théorie projective et métrique des coniques propres, en obtenant une forme qui est sans doute plus simple que celle qu'on obtient lorsqu'on a recours aux méthodes ordinaires, analytiques et synthétiques. De la définition des faisceaux des  $F_1, F_2, F_3$  on passe à l'étude des bi-rapports:

$$\text{rapp } u = \text{rapp } (u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 u_3}{u_2 u_3} \cdot \frac{u_2 u_4}{u_1 u_4},$$

est le rapport anharmonique de la succession  $u$ , ou aussi le bi-rapport de la succession  $u$  qui est fonction de la position des formes  $u$  et qui peut prendre les valeurs  $0, 1, \infty$  lorsque seulement deux au moins de ses éléments ont même position. Lorsque on a  $\text{rapp } u = -1$ , la succession est harmonique. On peut remarquer que de cette manière le bi-rapport se trouve introduit comme notion générale, ce qui n'est pas indispensable, comme dans la Géométrie projective ordinaire. — Les homographies dans les faisceaux sont définies aux numéros (55-57): l'opération  $\sigma$  qui transforme les éléments de  $U$  dans les éléments de  $U'$ ,  $U$  et  $U'$  étant deux faisceaux de formation, sera une transformation linéaire ou homographique lorsque seulement, les éléments  $a, b$  de  $U$  et le nombre  $m$  étant invariables, on aura toujours,

$$\sigma(a + b) = \sigma a + \sigma b, \quad \sigma(ma) = m(\sigma a),$$

c'est-à-dire si l'opération est distributive par rapport à la somme et commutative par rapport au produit par un nombre.

L'homographie  $\sigma$  est renversable si  $a'b' \neq 0$ , c'est-à-dire s'il est permis de considérer l'homographie  $\sigma^{-1}$ . L'homographie projective est caractérisée par le symbole *posit*  $\sigma$ , c'est-à-dire par le symbole d'une opération déterminée qui transforme les  $U$  dans les éléments de *posit*  $U'$ ,  $U$  et  $U'$  étant deux faisceaux de formations.  $\lambda = \text{posit } \sigma$  est déterminée univoquement si  $\sigma$  est connu; mais quand au contraire  $\lambda$  est connu, il existe un nombre infini de solutions *posit*  $\sigma$  qui se déduisent l'une de l'autre par multiplication par un nombre.

Si  $a$  et  $b$  sont les éléments de  $U$ , tels que  $ab \neq 0$ , alors, de quelque façon que l'on fixe les éléments  $p$  et  $q$  de  $U$ , on a toujours,

$$p(\sigma q) - q(\sigma p) = \frac{pq}{ab} [a(\sigma b) - b(\sigma a)].$$

Si  $\sigma$  est renversable et  $a', b'$  sont des éléments de  $U'$ ,

$$a'(\sigma^{-1} b') - b'(\sigma^{-1} a') = \frac{(\sigma^{-1} a')(\sigma^{-1} b')}{ab} [a(\sigma b) - b(\sigma a)].$$

Si  $U$  et  $U'$  sont des faisceaux de  $F_1$  (ou de  $F_2$ ), du même plan, ayant les supports (ou centres) distincts, alors,

$$\text{posit} [a(\sigma b) - b(\sigma a)]$$

est une droite (ou un point) qu'on nomme *axe* (ou *centre*) de collinéation de l'homographie  $\sigma$  et de son inverse, si elle existe. Les substitutions (58), la transformation de Steiner (59) conduisent à la construction de Steiner (60) fondée sur le théorème, « si  $\lambda$  est une correspondance de Steiner pour la circonférence  $\Gamma$ , si  $S$  est un point de  $\Gamma$  et l'opération  $\sigma$  est telle que, étant le point  $P \neq S$  de  $\Gamma$  quelconque, on a  $\sigma [\text{posit} (SP)] = \text{posit} [S (\lambda P)]$ , alors  $\sigma$  est une homographie projective renversable (qui transforme les rayons  $SP$  dans les rayons  $S (\lambda P)$  qui fait correspondre à la tangente en  $S$  au cercle  $\Gamma$  la droite  $S (\lambda S)$ ). Le théorème réciproque lui aussi est vrai.

De cette manière les homographies dans les faisceaux en font dériver des transformations linéaires dont on trouve la théorie complète aux numéros 100-105. Comme l'a montré aussi M. Carvallo, ces transformations donnent des remarquables applications dans la physique et dans la mécanique lorsqu'on a recours aux symboles de Grassmann. L'auteur se limite dans ce livre à n'en montrer que les applications à la Géométrie projective.

L'involution est considérée comme une substitution qui n'est pas un nombre, mais dont le carré est un nombre. La substitution  $\sigma$  qui n'est pas nulle est une involution sous la condition nécessaire et suffisante que si les éléments  $a, b$  du faisceau sont quelconques, on doit avoir toujours :  $a(\sigma b) - b(\sigma a) = 0$  : donc il est aussi nécessaire et suffisant que l'invariant de  $\sigma$  soit nul.  $\sigma^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$  exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'involution  $\sigma$  soit elliptique (les éléments unis manquent), ou parabolique (*posit*  $\sigma$  a un élément uni), ou hyperbolique (*posit*  $\sigma$  a deux éléments unis).

L'étude des coniques (64-68) dépend directement de l'homographie dans les faisceaux, ce qui évite la discussion de l'équation générale du deuxième degré, analyse qu'on trouve dans tous les traités ordinaires de Géométrie analytique, et qui, au fond, n'a rien de géométrique.

Il y a lieu de mentionner le passage (65) de la construction par points à la construction par tangentes, ainsi que l'opération (qui substantiellement est une polarité) donnant le diamètre (67) et aussi la méthode pour obtenir l'équation générale des coniques proprement dites (67).

Dans la quatrième partie l'auteur pose d'abord la notion de limite. Suivant le formulaire de M. Peano, il indique par la notation  $\lim (f, u, x)$  la limite de la fonction  $f$  lorsque la variable, dans ses variations dans la classe  $u$  des nombres réels, se rapproche de  $x$ , élément de la classe dérivée de  $u$ . Si  $a$  est une  $F$  (fixe, constante), on a  $\lim (f, u, x) = a$  quand, quel que soit le produit  $K$  de  $4-r$  points, on a toujours pour la fonction numérique  $Kf$  l'égalité  $\lim (kf, u, x) = ka$ . Ainsi la définition de limite d'une formation variable se trouve ramenée à la définition d'une fonction numérique. Si  $f$  est un élément projectif (point, droite ou plan) et  $a$  est encore un élément projectif de même espèce, on aura  $\lim (f, u, x) = a$  quand il sera possible déterminer une formation géométrique  $f'$ , fonction des  $u$ , telle que,  $\text{posit} f'y = fy$ , et aussi  $\text{posit} [\lim (f', u, x)] = a$ , étant les  $y$  de  $u$  quelconques. Les deux symboles *posit* et *lim* sont commutatifs. La dérivée de  $f$  dans la classe  $u$ , pour la valeur  $x$  de la variable, est la limite de  $(fy - fx)/(y - x)$ , lorsque  $y$  dans ses variations en  $u$ , se rapproche de  $x$ . Si la dérivée d'une  $F_r$  existe, elle est

toujours une  $F_r$  ; celle d'une constante est zéro ; donc la dérivée d'un point propre est un vecteur ; la dérivée d'un vecteur, d'un bi-vecteur, d'un tri-vecteur est encore un vecteur, un bi-vecteur, un tri-vecteur. Les coordonnées de la dérivée sont les dérivées des coordonnées (car la dérivée d'une somme est somme des dérivées de ses termes) ; l'opération « dérivation » est commutative avec l'homographie. Ces principes et les développements qui en découlent sont tout de suite appliqués par l'auteur aux lignes et enveloppes de droites et de plans (71-78), aux surfaces réglées, aux enveloppes et *trajectoires* des systèmes de lignes, aux surfaces en général, et toutes ces questions géométriques sont rapidement développées d'une manière très élégante et générale, montrant encore une fois la grande utilité qu'on retrouve à faire un vecteur du paramètre différentiel.

Les formules de Frenet (79-86), qu'on nomme ordinairement de Serret mènent sous forme vectorielle, tout directement à des importants résultats géométriques, particulièrement dans la théorie de l'hélice, où les démonstrations acquièrent une extrême simplicité. Comme on ne fait pas usage de coordonnées, les invariants disparaissent naturellement dans la théorie ordinaire des coniques (64-68, 114-120), des quadriques (121-125), des lignes de courbure, des géodésiques et asymptotiques (97-99). Le paramètre différentiel (95) est défini au chapitre cinq de cette même partie : Si  $u$  est un nombre, fonction d'un point propre variable  $P$ , et si le champ de  $P$  ne se réduit pas à une ligne ou à une surface, nous nommerons paramètre différentiel de  $u$ , et nous indiquerons par  $\nabla u$ , le vecteur tel que  $du = \nabla u \times dP$ . » De cette manière le paramètre est introduit comme vecteur (Hamilton) et non comme nombre (Lamé), ce qui permet d'étudier plus simplement assez de questions géométriques dont les équations se réduisent à des expressions très élémentaires : on a, par exemple,  $dP \cdot dK = 0$  comme équation différentielle des lignes de courbure ( $K =$  vecteur unitaire,  $PK =$  normale en  $P$  à la surface) ; on a  $K \cdot dP \cdot d^2P = 0$  comme équation différentielle des géodésiques ;  $dP \times dK$  comme équation différentielle des lignes asymptotiques ; et la détermination des lignes de courbure d'une surface se fait (97) en recourant à une homographie de vecteurs au lieu de l'invariant différentiel quadratique. Pour donner un exemple de la simplicité qu'on retrouve dans les démonstrations, il suffira de reporter celle du théorème de Terquem : « Si une ligne commune à deux surfaces est ligne de courbure d'elles, alors les deux surfaces se coupent sous un angle constant le long de cette ligne. » « Au point  $P$  commun aux deux surfaces soient  $PK, PK_1$  les normales : on a,  $d(K \times K_1) = (dK) \times K_1 + (dK_1) \times K$ . Si  $P$  est ligne de courbure des deux surfaces, alors  $dK, dK_1$  sont parallèles à  $dP$  et normales à  $K$  et  $K_1$ , c'est-à-dire que  $d(K \times K_1) = 0$ , ce qu'il fallait démontrer. »

L'usage du paramètre différentiel permet encore de traiter avec les géodésiques des surfaces (99) les questions analogues à celles qu'on a pour les droites sur le plan.

Dans la cinquième partie on retrouve développée d'une façon complète et dans un espace très petit, la théorie générale de l'homographie dans tous les systèmes projectifs. Les collinéations (106-113) fournissent les opérations qui ont une importance capitale dans la Géométrie projective. Toute homographie  $\sigma$  qui transforme  $F_1$  en  $F_1$  (substitution) est telle que 1<sup>o</sup>, il existe une  $F_1 W$  avec laquelle  $F_1$  et sa correspondante, par rapport à  $\sigma$  sont collinéaires ; 2<sup>o</sup>, l'homographie  $\sigma^{-1}$  transforme chaque  $F_1$  en un multiple de  $W$ ,

est une collinéation. Si  $\sigma$  est une collinéation, il existe du moins une  $F_1 W$  et une  $F_3 \Pi$  telles que,  $F_1 P$  étant quelconque, on a toujours :  $\sigma P = P + P\Pi.W$ , ou bien, ce qui est le même,  $\sigma P = (1 + W\Pi)P + PW.\Pi$ .

Les collinéations donnent les homographies et les projectivités avec les théorèmes fondamentaux de la Géométrie descriptive et les polarités qui dans le plan conduisent à la théorie des coniques et dans l'espace à celle des quadriques.

L'homologie est définie en posant : *homologie* = *collinéation renversable*, et alors on a directement le théorème : *homologie* = *collinéation à bi-rapport* qui n'est pas nul. L'homologie  $\sigma$  est involutive si son carré est un nombre : pour  $\lambda = \text{posit } \sigma$ ,  $\lambda$  est une involution projective : toute homologie différente de l'identité et qui a le centre propre et la base qui n'est pas entièrement à l'infini, est *propre*. Si son plan limite et celui de son inverse coïncident, elle est une homologie involutive.

L'affinité, l'homothétie, la congruence sont étudiées en posant, *affinité* = *homologie à centre impropre et base propre* ; *homothétie* = *homologie à centre impropre et base à l'infini* ; *congruence* = *homologie à centre et base à l'infini*.

Chaque homographie de la forme  $(\sigma ; \alpha)$ , où  $\sigma$  est une projection centrale (collinéation non renversable, c'est-à-dire à bi-rapport nul) et  $\alpha$  une  $F_3$  non nulle, et qui ne sort de *cent*  $\sigma$ , est appelée une projectivité. — L'étude des corrélations [homographies qui transforment les  $F_1$  (ou  $F_3$ ) d'un plan dans les  $F_2$  (ou  $F_1$ ) du même plan, ou bien qui transforment les  $F_2$  (ou  $F_3$ ) d'une étoile dans les  $F_3$  (ou  $F_2$ ) d'une étoile concentrique à la première] mènent à l'étude des polarités (114-124) dans le plan, dans l'étoile, dans l'espace, et cela sous une forme plus générale que celle qu'on obtient par les ordinaires polarités projectives qui sont plus compliquées et ne donnent rien de la partie géométrique ne pouvant s'occuper de ce qui se rapporte aux coordonnées usuelles. Les théorèmes de Desargues et Sturm y reçoivent une démonstration aussi simple qu'on peut le désirer, et l'étude de la fonction générale du deuxième ordre en dérive directement.

A la fin du volume sont des notes où l'on obtient sous forme élémentaire et en peu de lignes, quoique sans supprimer aucun développement, les surfaces de révolution à courbure (totale ou moyenne) constante, avec d'autres remarquables propriétés des trocoïdes à base rectiligne, dont l'examen est d'ordinaire très long et très difficile.

De l'aperçu des matières contenues dans ces *Lezioni*, il ressort que M. Burali-Forti se sert de la méthode géométrique de Grassmann non seulement comme d'instrument de démonstration, mais aussi comme moyen de recherche : et, il faut en convenir, elle s'y prête mieux que toutes les autres méthodes, à cause de son algorithme tout à fait semblable à celui de l'analyse ordinaire ; il opère directement sur les éléments géométriques, point, droite, plan, sans se servir des coordonnées, en substituant ainsi complètement aux invariants numériques les simples opérations géométriques et permettant d'étudier par un procédé unique et avec la même rigueur tant les propriétés métriques que celles projectives. Et pour mettre encore plus en évidence l'utilité de la méthode adoptée par M. Burali-Forti, il suffit de rappeler combien l'usage des coordonnées cartésiennes est malaisé dans l'étude des propriétés projectives et que, d'autre part, les coordonnées projectives ne se prêtent pas à l'étude des propriétés métriques, sans introduire les

imaginaires en exprimant l'élément très simple « angle » comme le produit par  $\sqrt{-1}$  du logarithme népérien d'un bi-rapport imaginaire. De plus l'algorithme de Grassmann contient comme des cas particuliers toutes les méthodes analytiques et graphiques : les coordonnées cartésiennes (13-15, 19-22), polaires (64) et projectives (25), les homographies (3<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> parties), les équipollences (de Bellavitis), les barycentriques (de Möbius), les quaternions (de Hamilton), etc.<sup>1</sup> — La Mécanique y trouve une préparation naturelle dans la théorie des formes (41), dans les opérations / et  $\times$  (74, c) et la cinématique en résulte comme traitée implicitement (26-39, 84 trocoïdes).

Le livre a été écrit pour l'Académie militaire italienne, mais comme toute la théorie qu'il développe est fondée sur des notions élémentaires d'algèbre et de calcul différentiel, on peut aussi le recommander pour les cours universitaires où il représenterait un cours plus organique que celui qu'on y reçoit ordinairement, et particulièrement dans les cours des Facultés italiennes où l'enseignement de la Géométrie supérieure se trouve réparti, en donnant lieu à beaucoup de doubles emplois, sous des formes différentes dans les dénominations de Géométrie analytique, projective, descriptive, etc.

C. ALASIA (Tempio, Sard.)

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 1. Sommaires des principaux périodiques :

**Annals of Mathematics**, published under the Auspices of Harvard University. Cambridge, Mass., U. S. A. Second Series. Vol. 5.

October 1903. — A.-G. GREENHILL : The Mathematical Theory of the Top. — P. SAUREL : On Quadratic Forms. — E.-B. WILSON : A Generalized Conception of Area : Applications to Collineations in the Plane. — S. WOODS : Lines of Curvature on Minimum Developables.

January 1904. — C. ARZELA : Note on Series of Analytic Functions. — E.-P.-R. DUVAL : Graphs of the Functions  $\Pi$  and  $\Psi$ . — A.-S. GALE : Examples of Non-applicable Surfaces having the same Gaussian Curvature at Corresp Points. — A.-G. GREENHILL : The Mathematical Theory of the Top.

April 1904. — H.-A. CONVERSE : On a system of Hypocycloïds of Class Three Inscribed to a Given 3-line, and some Curves Connected with it. — L.-E. DICKSON : Determination of all Groups of Binary Linear Substitutions with Integral Coefficients taken Modulo 3 and of Determinant Unity. — E.-B. WILSON : Projective and Metric Geometry. — G.-H. LING : A Geometric Discussion of the Abs. Convergence of a Series with Complex Terms.

**Archiv der Mathematik und Physik**, herausgegeben von E. LAMPE, W. MEYER, E. JAHNKE. 7. Band ; B.-G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Heft 1-2. — FR. MEYER : Über den Ptolemäischen Satz. — H. STAHL : Bemerkungen zur Theorie der Abelschen Funktionen. — S. HALLER : Untersuchung der Brennpunktskurve eines Kegelschnittbüschels mit besonderer

<sup>1</sup> Cfr. *Formulaire de Mathématique* de M. PEANO, — édition de 1901-1903, pag. 349.