

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE
Autor: Jamet, V.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9265>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

une idée juste. Il n'est peut-être pas inopportun de rappeler ici que les membres de la Société mathématique de France ont connu sur ce sujet les scrupules d'un de leurs anciens confrères. Malheureusement, l'auteur s'obstinait à voir dans l'incorrection du langage une idée fautive de Cauchy. Par son manque de mesure et de perspicacité, il a sans doute éloigné ses auditeurs d'une observation qui avait quelque chose de juste.

E. CARVALLO (Paris).

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Quand on veut donner aux élèves, antérieurement à toute notion sur les dérivées, l'exemple du développement d'une fonction en série entière, on recourt tout naturellement à l'identité.

$$(1) \quad (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(pour $x < 1$), qui résulte, soit de la théorie de la division, soit des progressions géométriques. Je me propose de généraliser cet exemple, et j'attache une certaine importance à cette généralisation, à cause de l'application dont elle est susceptible, et par laquelle je terminerai cet article. Pour le moment je veux montrer comment la formule (1) entraîne, comme conséquence, la formule suivante

$$(2) \quad (1 - x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \\ + \frac{m(m+1) \dots (m+p-1)}{p!} x^p + \dots$$

pour toutes les valeurs entières de m .

Soient, en effet, deux séries entières

$$\begin{aligned} S &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ T &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

convergentes pour une même valeur de x . Je dis que le produit ST est égal à la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_p b_0) x^p,$$

dont la convergence résultera de la démonstration ci-après. Désignons par S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série S , par T_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série T , posons

$$S = S_n + \alpha, \quad T = T_n + \beta$$

et observons que

$$ST = S_n T_n + \alpha T_n + \beta S_n + \alpha \beta.$$

Nous en déduisons que, n croissant au delà de toute limite $S_n T_n$ a pour limite ST .

Mais

$$S_n T_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_p b_0) x^p.$$

Donc le second membre de cette égalité a pour limite ST .

Admettons maintenant que l'égalité (2) soit vraie pour une certaine valeur de m et proposons-nous de démontrer qu'elle est vraie pour la valeur suivante. A cet effet, multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} (1 - x)^{-(m+1)} &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{m(m+1) \dots (m+p-1)}{p!} \right) x^p \end{aligned}$$

et il reste à démontrer que le coefficient de x^p est égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p!}.$$

Soit donc

$$A_{m,p} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p!}.$$

On trouve, successivement

$$A_{m,p} = A_{m,p-1} \left(1 + \frac{m}{p}\right) = A_{m,p-1} + A_{m-1,p}.$$

De même

$$A_{m,p-1} = A_{m,p-2} + A_{m-1,p-1},$$

$$A_{m,p-2} = A_{m,p-3} + A_{m-1,p-2},$$

$$\dots$$

$$A_{m,2} = A_{m,1} + A_{m-1,2},$$

$$A_{m,1} = m + 1.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité résultante, on trouve

$$A_{m,p} = A_{m-1,p-1} + A_{m-1,p-2} + \dots + A_{m-1,2} + \frac{m}{1} + 1,$$

ou bien :

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots +$$

$$\frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!},$$

c. q. f. d.

Application. Il résulte de ce qui précède que pour toute valeur de m , entière et positive, le nombre

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

est égal à la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{m^3} + \dots$$

Or le terme général de cette série, savoir

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} \cdot \frac{1}{m^p}$$

est égal à

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 + \frac{p-1}{m}\right)}{p!}.$$

On en conclut

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} > 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{p!} = e.$$

D'autre part :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{m}\right)}{p!} < e.$$

J'aurai donc démontré que, m croissant au delà de toute limite, les deux nombres

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

ont pour limite e , si je fais voir que leur différence a pour limite zéro. Or

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m;$$

et, en vertu de l'identité :

$$x^m - a^m = (x - a) (x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1}),$$

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{m(m-1)} \left[\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} + \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \right]$$

On en conclut :

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{m(m-1)} m \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \frac{e}{m-1};$$

et cette inégalité démontre la proposition.

V. JAMET (Marseille).

P. S. — Au moment de corriger l'épreuve, je m'aperçois que la dernière partie de ce travail est susceptible d'une grande simplification. En effet, la relation (3) entraîne la suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{-(m+1)} > e$$

ou bien

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > e.$$

Mais :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m + \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Donc :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m;$$

donc

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{m},$$

et l'on est conduit à la même conclusion que ci-dessus.