

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1906)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES FONCTIONS ANGULAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

**Autor:** Andrade, Jules

**Kapitel:** I. — Quelques remarques sur la continuité.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9270>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LES FONCTIONS ANGULAIRES

## DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

---

### I. — Quelques remarques sur la continuité.

DÉFINITION. — Un triangle sphérique dont aucun côté ne dépasse un quadrant est dit un triangle sphérique *réduit*.

LEMME 1. Dans un triangle sphérique réduit tout angle extérieur du triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

LEMME 2. — Dans un triangle sphérique réduit la bissectrice d'un angle intérieur partage le côté opposé en deux segments dont l'ordre d'inégalité est le même que celui des côtés contigus à ces segments.

Ce lemme est une conséquence du précédent et de la considération du triangle symétrique du proposé par rapport au plan de l'arc de grand cercle bissecteur.

THÉORÈME 1. — Dans tout triangle sphérique réduit, dont les deux côtés de l'angle droit sont suffisamment inégaux et suffisamment réduits, le rapport du plus petit  $y$  de ces côtés au plus grand  $x$  de ces côtés est un nombre comparable au nombre qui mesure l'angle  $\widehat{C}$ , opposé au côté  $y$ , lorsqu'on prend l'angle droit pour unité.

En d'autres termes, on aura à la fois

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} = \frac{y}{x} \cdot m ; \\ \frac{y}{x} = \frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} \cdot m' ; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m \text{ et } m' \text{ désignant deux} \\ \text{ nombres finis.} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Considérons un triangle sphérique ABC rectangle en A, dont AB est le côté le plus petit, soit  $\widehat{C}$

l'angle aigu opposé à ce côté ; sur AC portons  $AD_1 = AB$ , et joignons B et  $D_1$ , par un arc de grand cercle ; portons  $D_1D_2 = BD_1$ , et joignons B et  $D_2$  par un arc de grand cercle ; et ainsi de suite ; soit  $D_n$  le dernier point obtenu sur AC dans cette opération avant de franchir le point C.

Nommons  $u_1$  la valeur commune des angles de sommets B et  $D_1$  dans le triangle isocèle  $AD_1B$  ; nommons de même  $u_2$  la valeur commune des angles de sommets B et  $D_2$  dans le triangle isocèle  $BD_1D_2$  ; et ainsi de suite. La considération de l'excès sphérique dans ces triangles successifs nous donne

$$u_n > \frac{u_1}{2^{n-1}} > \frac{1^{\text{droit}}}{2^n},$$

et par suite

$$\widehat{ABD}_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n > u_1 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) ;$$

ainsi donc :

$$(1) \quad \text{,} \quad (1^{\text{dr.}} > \widehat{CBA} > 2u_1 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) .$$

Notons en passant cette *conséquence* :

L'angle aigu d'un triangle sphérique rectangle et isocèle dont les deux cotés de l'angle droit tendent vers zéro a pour limite la moitié d'un droit.

Soit P le pôle de l'arc de grandeur AC, répétons à la suite l'angle  $\widehat{C}$  autant de fois :  $q$ , qu'il est possible, dans l'angle droit  $\widehat{ACP}$  ; les basés opposées au sommet C et situées sur AP dans ces triangles successifs vont en croissant ainsi que les aires de ces triangles ; soit

$$\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} \times q ,$$

on a :

$$\text{aire ABC} < \frac{\text{aire CQA}}{q} ,$$

c'est-à-dire en prenant l'aire du triangle trirectangle comme unité :

$$\text{aire ABC} < \text{aire CQA} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} ,$$

ou

$$(2) \quad \text{aire ABC} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\left(1 - \frac{\theta}{q}\right)^{\text{droit}}},$$

$\theta$  désignant un nombre positif  $< 1$  ;

l'entier  $q$  sera supposé  $> 2$ .

D'ailleurs nous avons pour tirer parti de (2)

$$\text{aire ABD}_n < \text{aire ABC},$$

donc en vertu de (2)

$$u_n + \widehat{\text{ABD}}_n - 1^{\text{dr}} < \frac{u_n}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}},$$

ou, à fortiori :

$$u_n \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] + 2u_1 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) - 1^{\text{dr}} < 0,$$

$$(3) \quad u_n \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] < 1^{\text{dr}} - 2u_1 + \frac{2u_1}{2^n} < \frac{2u_1}{2^n}.$$

Or nous avons

$$x < 2^{n+1}y,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{y}{x},$$

donc en substituant dans (3) nous aurons cette limitation de  $u_n$

$$u_n < 4u_1 \frac{y}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}},$$

et à fortiori

$$\widehat{\text{BCA}} < 4u_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{x}{1 \text{ quadrant}}} \cdot \frac{y}{x},$$

et si

$$\frac{x}{1 \text{ quadrant}} < \frac{1}{3},$$

$$(4) \quad \widehat{BCA} < 12u_1 \frac{y}{x}.$$

Nous allons maintenant limiter le rapport  $\frac{y}{x}$  par l'angle C. Sur AB prenons  $AD = AC = x$ ; et portons sur AB à partir de A,  $AB = y$ , autant de fois, soit  $r$ , que possible dans AD;  $AE = (r + 1)y > AD$  soit  $C''_0$  l'angle ECA; et soit  $C_0$  l'angle DCA;

$$ry < x < (r + 1)y$$

et en vertu d'une remarque précédente :

$$\widehat{C''_0} < (r + 1) \widehat{C},$$

et à fortiori :

$$\widehat{C_0} < \left(\frac{x}{y} + 1\right) \widehat{C},$$

d'où

$$\frac{y}{x + y} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0}},$$

ce qui donne

$$\frac{y}{x} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0} - \widehat{C}}$$

**THÉORÈME 2.** — Extension du théorème précédent aux triangles plans. Dans la géométrie de la droite fermée, le plan est une variété de la sphère et la méthode précédente s'applique alors sans modification. Nous n'avons alors qu'à envisager le cas de la droite ouverte; or, en laissant de côté le cas classique d'Euclide, on sait que dans la géométrie de la droite ouverte la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits d'une quantité qu'on appelle le déficit du triangle.

Répétons alors la construction indiquée plus haut des points successifs  $D_1, D_2, \dots, D_n$  situées sur AC et conservons

les notations employées, nous aurons ici, en introduisant  $x' = BC$ ,

$$x' < 2^{n+1} y ;$$

et

$$\widehat{C} < u_n < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{1}{2^n} < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{2y}{x'} < \frac{2y}{x-y} ,$$

ou

$$\frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} < \frac{2y}{y-x} .$$

Telle est la limitation de l'angle C par le rapport  $\frac{y}{x}$  ; quant à la limitation du rapport  $\frac{y}{x}$  par l'angle C elle ne souffre aucune modification.

REMARQUE. — Les théorèmes précédents nous seront surtout utiles en considérant des triangles rectangles dont le plus grand côté de l'angle droit sera variable en tendant vers zéro, c'est-à-dire infiniment petit.

On peut alors comme conséquence directe de ces théorèmes énoncer ce résultat : si  $y$  est infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de  $x$ , l'angle C est infiniment petit avec  $x$  et réciproquement.

De là encore les conséquences importantes qui suivent, mais dont la démonstration est facile et intuitive :

THÉORÈME 3. — Dans un cercle *donné* la corde qui est vue du centre sous un angle infiniment petit est un infiniment petit de même ordre et elle fait un angle infiniment petit avec la perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

THÉORÈME 4. — Dans un triangle rectangle (sphérique ou plan) dont le côté de l'angle droit  $x$  est fini et dont l'autre côté  $y$  est infiniment petit, l'excès de l'hypoténuse  $z$  sur le côté  $x$  est avec  $y$  dans un rapport qui est infiniment petit.

THÉORÈME 5. — Sur le plan (ou sur la sphère) la longueur d'un arc de cercle peut être définie comme la limite du périmètre d'une ligne brisée inscrite dont les côtés tendent simultanément vers zéro. (Remarque ; sur la sphère les éléments de la ligne brisée sont évalués angulairement par leurs angles au centre de la sphère).

THÉORÈME 6. — La longueur  $L$  d'un arc de cercle dont l'angle au centre est  $\alpha$ , est déterminé, est une fonction *continue* du rayon  $r$  de l'arc et l'on peut écrire

$$(5) \quad L = \alpha R(r), \quad \text{la fonction } R \text{ est continue.}$$

THÉORÈME 7. — Ce théorème s'applique aussi sur la sphère, en évaluant angulairement les longueurs d'arcs de grand cercle et l'on a

$$(6) \quad l = \alpha \psi(r), \quad l \text{ et } r \text{ étant évaluées angulairement.}$$

REMARQUE. — Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde tend vers l'unité.

## II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

THÉORÈME 8. — Quand un solide éprouve un déplacement autour d'un point fixe, ce déplacement peut être obtenu par une rotation convenable autour d'un axe convenable passant par ce point fixe.

THÉORÈME 9. — Quand un solide fixé par un point  $O$  éprouve une rotation  $\alpha_1$  autour d'un axe  $U_1$  passant par ce point ; puis une rotation  $\alpha_2$  autour d'un axe  $U_2$  passant par ce point, le déplacement final du solide peut être obtenu par une rotation unique  $\alpha_3$  autour d'un axe  $U_3$  passant par ce même point.

En représentant les axes par leurs images sphériques *orientées*, sur une sphère de centre  $O$  la combinaison des déplacements successifs (1) et (2) est définie comme il suit (toutes les rotations ne dépassant pas un demi-tour) : Par le premier pôle  $P_1$  menons un demi-arc de grand cercle  $P_1x$  faisant avec le demi-arc de grand cercle  $\overrightarrow{P_1P_2}$  un angle égal à la rotation  $-\frac{1}{2}\alpha_1$  ; par le second pôle  $P_2$  menons un demi-arc de grand cercle  $P_2y$  faisant avec le demi-arc de grand cercle  $\overrightarrow{P_2P_1}$  l'angle  $+\frac{1}{2}\alpha_2$ .

Ces deux demi-arcs de grand cercle se coupent au point  $P_3$  et l'angle de  $\overrightarrow{P_3P_2}$  avec le prolongement de  $\overrightarrow{P_1P_3}$  est égal à  $+\frac{1}{2}\alpha_3$ .