

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FONCTIONS ANGULAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

Autor: Andrade, Jules

Kapitel: III. — Composition des vecteurs.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9270>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. L'opération est associative (plusieurs vecteurs composants sont remplaçables par leur vecteur résultant) ;

5. L'opération est continue ;

6. L'ensemble de deux vecteurs n'est équivalent à zéro que si ces vecteurs, portés par une même droite, sont égaux et contraires.

III. — Composition des vecteurs.

Composition des vecteurs concourants d'un plan.

Nous allons indiquer l'interprétation analytique des faits qui précèdent. Soit F un vecteur, d'intensité f , émanant de O_1 et défini dans un plan en *direction autour de ce point* par l'angle *orienté* α que sa direction fait avec une droite OX .

Il résulte des propriétés de l'opération de composition des vecteurs que ce vecteur peut être décomposé en deux vecteurs X et Y agissant suivant Ox et Oy et que

$$X = f \cdot g(\alpha) \quad , \quad Y = f \cdot h(\alpha) \quad ,$$

g et h désignant deux fonctions *continues* de l'angle α .

L'invariance donne de suite les propriétés :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(-\alpha) = g(\alpha) \quad , \quad h(-\alpha) = -h(\alpha) \quad , \\ g(\alpha + 1^{\text{dr}}) = -h(\alpha) \quad , \\ h(\alpha + 1^{\text{dr}}) = h(\alpha) \quad , \end{array} \right.$$

enfin l'associativité et l'invariance combinées, nous donnent après une rotation arbitraire du système des axes de repère :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) = g(u)g(v) - h(u)h(v) \quad , \\ h(u + v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) \quad . \end{array} \right.$$

Les propriétés (I) et (E) nous donnent de suite l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) + g(u - v) = 2g(u)g(v) \quad , \\ \text{que nous associerons à la condition de continuité} \\ g(0) = 1 \quad . \end{array} \right.$$

Nous aurons d'ailleurs ici la condition supplémentaire $g(1^{\text{droit}}) = 0$. (8 bis). Or, j'ai démontré (*Bull. Soc. Mathém. de France*, Année 1900) que toute fonction g continue, solution de (8) doit admettre une fonction dérivée et que les seules solutions continues de (8) sont alors :

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\dots 2n} \equiv \cos \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\dots 2n} \equiv \cos \text{hyp} \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1. \end{array} \right.$$

Dans le cas qui nous occupe nous avons la condition supplémentaire $g(1^{\text{dr}}) = 0$ et le premier type de solution convient seul ici ; la constante k dépend du choix de l'unité d'angle.

k sera égal à 1 si on adopte une unité d'angle dans laquelle l'angle droit sera représenté par la plus petite racine $\frac{\pi}{2}$ de l'équation :

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\dots 2n} = 0.$$

Composition des vecteurs concourants dans l'espace. — En décomposant un vecteur suivant les 3 arêtes d'un trièdre trirectangle, on voit qu'on peut effectuer cette décomposition, en apparence de trois manières différentes, et en exprimant que ces trois modes sont : 1° compatibles, 2° uniques ; d'après le 6^{me} caractère de la composition on obtient *les relations fondamentales* qui existent entre les six éléments d'un triangle sphérique.

Pour compléter l'étude du système (8), j'ajoute que si l'on pose

$$H(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(z) dz,$$

on aura, en laissant de côté le cas de $g(z) = 1$, et après un choix convenable de la variable z ,

$$\begin{aligned} g(\alpha + \beta) &= g(\alpha)g(\beta) - \varepsilon H(\alpha)H(\beta) , \\ H(\alpha + \beta) &= g(\alpha)H(\beta) + g(\beta)H(\alpha) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 \text{ si } g(\alpha) = \cos \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \alpha ; \\ (\varepsilon = -1) \text{ si } g(\alpha) = \cos \text{ hyp } \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \text{ hyp } \alpha . \end{aligned}$$

Composition des vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté. — Si on considère 2 rotations successives autour d'axes perpendiculaires à un plan P et dirigés d'un même côté de ce plan, on voit que si elles sont suffisamment petites, elles sont remplaçables par une rotation unique perpendiculaire à ce plan; cette circonstance va remplacer ici le rôle joué par le théorème 9 pour les vecteurs concourants. De là et par les lemmes déjà utilisés on conclut que :

Deux vecteurs d'égale intensité p , tous deux situés dans un même plan, perpendiculaires à une même droite de ce plan, et tirant d'un même côté de cette droite, admettent un vecteur résultant perpendiculaire à la même droite et de plus l'intensité de ce vecteur résultant a pour valeur $2 p S(x)$; x désignant la demi-distance des points où les vecteurs composants coupent la perpendiculaire commune, et S désignant une fonction continue.

De plus, en considérant 2 paires de tels vecteurs dont les pieds sur leur perpendiculaire commune sont distribués sur cette droite symétriquement par rapport à un même point, on voit que le caractère continu et le caractère associatif de la composition se traduisent encore par les conditions :

$$(11) \quad \begin{cases} S(x + y) + S(x - y) = 2S(x)S(y) , \\ S(0) = 1 . \end{cases}$$

Mais, cette fois la condition supplémentaire $g(1^{\text{droit}}) = 0$ de la composition des vecteurs concourants n'a plus son analogue; en sorte que nous avons ici le choix entre les trois solutions du problème 8, c'est-à-dire entre les trois déterminations :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } S(x) = 1 . \\ \text{ou } S(x) = \cos \frac{x}{k} , \\ \text{ou } S(x) = \cos \text{ hyp } \frac{x}{k} , \end{array} \right.$$

ce qui nous indique que la géométrie de l'ajustage va alors bifurquer en trois variétés dont la géométrie d'Euclide est un cas particulier.

La composition dans un plan de deux vecteurs inégaux perpendiculaires de même sens sur une même droite s'obtient d'ailleurs immédiatement en introduisant la fonction $R(r)$ de l'équation 5; il suffit de comparer les vitesses des pieds A et B des deux vecteurs ω_1 et ω_2 dans les mouvements composants et dans le mouvement résultant, soit C situé entre A et B le pied du vecteur résultant ω_3 ; en faisant $AC = x$, $CB = y$.

Nous aurons de suite :

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} .$$

Comparons ce résultat qui concerne les vecteurs vitesses de rotations à celui que fournit l'emploi de la fonction S; notre argument de comparaison sera la généralisation d'une méthode indiquée par Archimède. En effet, introduisons la fonction H, définie plus haut; soit C' un point intermédiaire entre A et B sur AB et soient C'A = x', C'B = y', D le symétrique de C' par rapport au pied A, E le symétrique de C' par rapport au pied B.

Par le rôle de la fonction H ou par sa forme analytique déjà indiquée, nous voyons que cette fonction est croissante dans la géométrie de la droite ouverte, de même cette fonction est croissante tant que la valeur de la variable n'atteint pas le quart du tour de la droite, dans la géométrie de la droite fermée, or on peut s'assurer en prenant la distance AB moindre qu'un demi-tour de droite qu'il n'existe entre A et B qu'un point C' tel que

$$\frac{\omega_1}{H(x')} = \frac{\omega_2}{H(y')} .$$

Supposons le point C' ainsi déterminé, nous pourrions poser :

$$\omega_1 = 2q \int_0^{x'} S(t) dt = 2qH(x') ,$$

$$\omega_2 = 2q \int_0^{y'} S(t) dt = 2qH(y') ,$$

on peut alors considérer le vecteur ω_1 comme le vecteur résultant d'une infinité de paires de vecteurs chargeant uniformément le segment $C'D$ avec la densité de charge q par unité de longueur et en même temps le vecteur ω_2 sera le résultat d'une charge de vecteurs infiniment petits chargeant le vecteur $C'E$ avec la même densité de charge; le vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 sera donc un vecteur ω_3 perpendiculaire à AB et dont le pied C'' est au milieu de DE ; ce vecteur ω_3 est alors déterminé par la relation :

$$\omega_3 = 2q \int_0^{x'+y'} S(t) dt = 2qH(x'+y') ,$$

d'ailleurs, si x'' et y'' sont les distances du point C'' à A et B , on a évidemment;

$$x'' = y' , \quad y'' = x' ,$$

en sorte que nous avons

$$\frac{\omega_1}{H(y'')} = \frac{\omega_2}{H(x'')} \quad \text{avec la condition } x'' + y'' = AB = s ,$$

comme nous avons tout à l'heure

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} \quad \text{avec la condition } x + y = s ,$$

mais de plus le point C'' est le pied de vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 comme le point C est le pied du vecteur résultant des deux mêmes; donc C et C'' se confondent et nous concluons avec $x'' = x$, et $y'' = y$

$$\frac{R(y)}{R(x)} = \frac{H(y)}{H(x)} ,$$

et comme x et y peuvent être pris quelconques avec ω_1 et ω_2 , il en résulte que les fonctions $R(x)$ et $H(x)$ sont proportionnelles l'une à l'autre.

La formule d'addition de la fonction H est donc applicable à la fonction R et nous avons alors comme conséquence des proportions

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)},$$

la relation

$$\omega_3 = \omega_1 S(x) + \omega_2 S(y).$$

REMARQUE. — Le raisonnement précédent eut pu s'appliquer mot pour mot, par l'emploi d'une sphère, aux vecteurs concourants et nous aurions trouvé alors pour la fonction analogue de $R(x)$ sur la sphère $\psi(\alpha)$ la même proportionnalité :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= h(\alpha) \cdot m = \sin \alpha \cdot m \\ R(x) &= H(x) \cdot m'. \end{aligned}$$

Il reste à déterminer la constante m' car m est évidemment égal à 1.

Pour y parvenir exprimons que la vitesse d'un point situé sur le vecteur ω_3 résultant des vecteurs qui représentent les vitesses des rotations concourantes ω_1 et ω_2 est nul ; en nommant x et y les distances d'un point de ω_3 aux droites ω_1 et ω_2 qui font avec ω_1 et ω_2 les angles α_1 et α_2 nous aurons :

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2},$$

car

$$\omega_1 R(x) = \omega_2 R(y)$$

et par la composition des vecteurs concourants

$$\omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2,$$

puisque

$$\omega_1 H(\alpha_1) = \omega_2 H(\alpha_2)$$

par la méthode d'Archimède.

Rapprochons ce résultat du théorème fondamental sur le dièdre.

Considérons une droite OA qui tourne d'un angle infiniment petit autour d'un axe OI , soit OA' la position infiniment voisine de OA ; AA' est la corde d'un arc de cercle de centre I ; soit de même B un autre point de OA qui vient

en B' par la même rotation, BB' est la corde d'un arc de cercle de centre J situé sur l'axe OI et d'après la propriété du dièdre, les angles AOA' et BOB' angles rectilignes d'un même dièdre sont égaux.

D'autre part, dans le triangle isocèle AOA' , et lorsque la rotation considérée tend vers zéro, on a :

$$\text{Lim} \frac{AA'}{\text{angle } AOA'} = R(OA), \quad \text{Lim} \frac{AA'}{\text{angle } AIA'} = R(AI);$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre

$$\text{Lim} \frac{\text{angle } AIA'}{\text{angle } AOA'} = \frac{R(OA)}{R(OI)} = \frac{R(OB)}{R(OI)}, \quad \text{puisque } \widehat{AIA'} = \widehat{BJB'}.$$

Ainsi donc le rapport $\frac{R(OI)}{R(OA)}$ est une simple fonction de l'angle $\alpha = AOI$; désignons cette fonction par $f(\widehat{AOI})$.

En rapprochant ce résultat de la proportion tout à l'heure obtenue, savoir

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2}$$

nous aurons :

$$\frac{f(\alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{f(\alpha_2)}{\sin \alpha_2},$$

c'est-à-dire $f(\alpha) = \sin \alpha \cdot n$, n étant constant.

Or, pour $\alpha = 1^{\text{droit}}$, $f(\alpha) = 1$, comme $\sin \alpha$; donc $n = 1$.

Démontrons enfin que $m' = 1$, c'est-à-dire, en écartant le cas euclidien, qu'une fois l'unité de longueur droite adoptée de manière que

$$S(x) = \begin{cases} \text{soit } \cos x \\ \text{soit } \cos \text{ hyp. } x \end{cases}$$

on aura

$$R(x) = H(x) = \int_0^x S(z) dz,$$

il n'y a d'ailleurs besoin de démontrer le théorème que dans la géométrie de la droite ouverte. Pour cela considérons sur une sphère déterminée un petit cercle de la sphère dont 2 rayons sphériques PA et PB issus du pôle P font entre eux

l'angle α , soit l la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si r est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin \left(\frac{AP}{R(r)} \right) \alpha.$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\text{Lim } \frac{l}{\text{corde AP}} = \alpha.$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P'A est la projection de la corde AP, on a :

$$\text{Lim } \frac{\text{corde PA}}{P'A} = 1, \quad \text{donc aussi,} \quad \text{Lim } \frac{l}{P'A} = \alpha;$$

or

$$l = H(P'A) \cdot \alpha \cdot m',$$

et comme $\frac{H(P'A)}{P'A}$ a pour limite 1 quand P'A tend vers zéro, on a

$$\text{Lim } \frac{l}{P'A} = \alpha \cdot m',$$

d'où, en comparant les deux limites de $\frac{l}{P'A}$, on conclut $m' = 1$.

REMARQUE. — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniment petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

LEMME FONDAMENTAL. — Soient U_1 et U_2 deux droites actuellement données et ne se coupant pas; considérons un premier corps solide S_1 animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1 , considérons la droite Δ_2 de ce solide qui coïncidait avec U_2 à l'époque t , et envisageons par rapport au solide S_1 un second solide S_2 tournant sur S_1 avec une vitesse angulaire constante ω_2 ; soit un certain point