

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1906)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** E.-T. Whittaker. — A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies ; with an Introduction to the Problem of three Bodies. 1 vol. relié, in-8°, XIII, 414 p, University Press, Cambridge ; Clay & Sons, Londres, 1904.

**Autor:** Marcolongo, R.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'éloge de Dirichlet n'est plus à faire et le public mathématique de tout pays accueillera certainement avec faveur les leçons que M. Arendt — un ancien élève de l'illustre maître — reproduit aujourd'hui dans leur forme originale et authentique.

Est-ce à dire qu'il faille considérer ce volume comme un livre à la hauteur des exigences modernes. En aucune façon, l'année même, 1854, où Dirichlet professait à Berlin le cours dont il s'agit ici, Riemann dans un célèbre mémoire étendait à des fonctions discontinues dans tout intervalle la notion d'intégrale et sa définition, actuellement dépassée, n'est plus qu'un cas particulier de celle que M. Lebesgue a donnée dans sa remarquable thèse en 1902.

Dirichlet ne s'occupe, pour ainsi dire, que d'intégrales au sens de Cauchy, mais ses méthodes sont si parfaites, ses points de vue si personnels que tout en attirant l'attention sur les points les plus délicats il instruit toujours sans jamais lasser le lecteur. S'il est loin d'ailleurs de toucher à toutes les questions, il ne quitte jamais un sujet sans l'avoir en quelque sorte épuisé.

L'ouvrage se divise en deux parties, de longueurs très inégales, la première consacrée aux intégrales proprement dites comprend les quatre cinquièmes du volume. Dans celle-ci après avoir donné la définition de l'intégrale des fonctions continues entre des limites finies et montré comment se généralise cette notion, Dirichlet fait une étude des intégrales eulériennes et autres actuellement classiques. Il passe ensuite aux intégrales doubles, mais s'en tient pour l'aire des surfaces gauches à la définition justement critiquée par MM. Schwarz et Peano, ce qui n'enlève rien à l'intérêt du chapitre relatif à l'aire d'une surface ellipsoïdale quelconque.

Dans le but de bien éclaircir la théorie des intégrales triples Dirichlet traite enfin d'une manière très complète le problème de l'attraction exercée par la masse d'un ellipsoïde sur un point matériel quelconque. Les résultats essentiels obtenus jusqu'à lui sont, tout d'abord, exposés avec le plus grand soin, puis sa solution personnelle, des plus élégantes, grâce à l'introduction de son facteur de discontinuité.

Ce facteur joue encore un rôle dans le chapitre qui termine cette première partie. Dirichlet l'utilise pour le calcul de certains volumes, de certains moments d'inertie, comme aussi pour la réduction d'une certaine intégrale multiple à des fonctions gamma.

La seconde partie de l'ouvrage comporte des applications touchant de près à la théorie des fonctions. On y rencontre entre autres, une étude sur les valeurs asymptotiques des factoriels infinis, une étude sur la série hypergéométrique.

Les lignes qui précèdent ne donnent qu'un aperçu trop sommaire de la richesse des leçons que nous venons d'analyser ; celles-ci valent la peine d'être lues avec soin et grande attention. Ceux qui apprennent se féliciteront de les avoir approfondies, ceux qui savent d'y avoir rencontré nombreux sujets de réflexions.

G. DUMAS (Zurich).

E.-T. WHITTAKER. — **A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies** ; with an Introduction to the Problem of three Bodies. 1 vol. relié, in-8°, XIII, 414 p, University Press, Cambridge ; Clay & Sons, Londres, 1904.

Dans la Préface à son excellente *Dynamique analytique* (1878), Mathieu a écrit : « Quand la seconde édition de la Mécanique analytique de Lagrange

« parut au commencement de ce siècle, elle était une œuvre accomplie ;  
« mais Poisson, Hamilton, Jacobi et d'autres géomètres ont apporté depuis,  
« sur cette matière, des travaux importants. »

Plus de vingt-cinq ans se sont écoulés et la publication de Mathieu a rapidement vieilli. Si les problèmes posés par les grands géomètres de la première moitié du XVIII<sup>m</sup>e siècle ne sont pas encore résolus, si quelques théories ont perdu de leur importance, d'autres ont apporté un nouveau jour sur bien des questions, et de nombreux travaux, notamment ceux de M. Poincaré, ont considérablement enrichi les théories de la Dynamique analytique.

M. Whittaker s'est proposé de pousser aussi loin que possible l'étude analytique du mouvement des systèmes dynamiques avec un nombre fini de degrés de liberté et de présenter un tableau complet de l'état actuel de cette branche de la Mécanique générale. Nous pensons qu'il a pleinement atteint son but. Disons pourtant, avec l'auteur, que son livre, qui fait dignement suite à l'*Analytical Statics* du Routh, a subi en général l'heureuse influence des excellents ouvrages de ce dernier.

Le domaine à explorer était immense et, presque toujours, l'auteur a bien choisi les choses les plus importantes, les démonstrations les plus simples ; et le lecteur ne doit pas chercher ailleurs tout ce qu'il lui faut pour bien comprendre les théories exposées ; car il trouve dans l'ouvrage même un exposé sommaire des éléments indispensables des théories d'Analyse utilisées dans les diverses applications. C'est ainsi que l'on trouvera la théorie de la transformation simultanée de deux formes quadratiques à la forme canonique, dans la théorie des vibrations des systèmes dynamiques ; les propriétés les plus importantes de la transformation spéciale de contact et du dernier multiplicateur de Jacobi dans la théorie de la transformation des équations de la dynamique ; etc.

Les applications simples, variées et intéressantes se succèdent à chaque page, et à la fin de chaque chapitre, suivant l'usage adopté dans les livres anglais, on trouve de nombreux exercices, proposés dans les examens d'Angleterre ou extraits de mémoires originaux.

Après ces caractères généraux, disons quelque chose sur la distribution des matières si riches et si abondantes contenues dans ce volume.

A l'exception d'un seul chapitre (le premier) qui résume les théorèmes et les formules les plus connues de la Cinématique d'un système rigide, et qui n'est certainement pas un des meilleurs du livre<sup>1</sup>, l'*Analytical Dynamics* peut se partager en trois parties.

La première partie comprend « à peu près » tout ce qu'on a coutume d'exposer dans un cours élémentaire de Mécanique. Les équations de Lagrange y jouent un rôle prépondérant et une large part est faite aux méthodes d'intégration qui, par les auteurs anglais, sont nommées de « *l'ignoration of coordinates* ». C'est à ces méthodes que l'auteur réduit la recherche des intégrales bien connues des aires et des mouvements du centre de masse. On y trouve naturellement tous les problèmes résolubles par quadratures, de la Dynamique d'un point et des systèmes rigides avec

<sup>1</sup> Par exemple le théorème de Chasles (art. 5) n'est pas démontré d'une manière complète ; la considération d'un couple de rotations est aussi incomplète (art. 4). Le théorème sur la composition de deux rotations, que l'auteur démontre également d'après M. Burnside, est attribué à Hamilton, qui lui a seulement donné la forme reproduite dans le texte : mais le théorème a été donné depuis bien longtemps par Rodrigues. (Journ. de Mathém. 5 [1840], p. 380).

un, deux, trois degrés de liberté ; leur discussion et leur résolution est toujours achevée par les fonctions de Weierstrass ; on doit aussi mentionner un chapitre, des plus intéressants, sur la théorie des vibrations ; un autre sur la Dynamique des systèmes non holonomes. L'auteur, qui dans la définition des systèmes holonomes (p. 33) a suivi Hertz (*Prinz. d. Mech.* 123), à propos des deux conditions linéaires auxquelles satisfont les variations des cinq paramètres définissant la position d'une sphère qui roule sans glisser sur un plan (système non holonome), aurait dû ajouter la condition indispensable que ces relations ne sont pas intégrables<sup>1</sup>.

La deuxième partie est, à notre avis, la plus intéressante. Elle commence par l'exposition des principes de Hamilton et de Gauss (ce dernier dans la forme que lui a donné Hertz) et du principe de la moindre action (Chap. IX). Le principe de Gauss méritait peut-être de plus grands développements, surtout d'après l'exposition magistrale faite par M. Boltzmann dans ses *Vorl. üb. die Princip. d. Mech.* 1. Th. § 65. La démonstration du *minimum* de l'intégrale qui représente l'action est fondée, comme il est connu (Darboux, *Théor. d. surf.* II) sur la remarquable expression de Lipschitz de l'énergie cinétique. L'auteur suit une méthode bien simple, mais qui ne nous semble pas à l'abri de toute objection. Le chapitre suivant est dédié aux systèmes hamiltoniens et à leurs *invariants intégraux*. La théorie des invariants intégraux d'un système d'équations diff. du premier ordre, fondée par M. Poincaré, a été l'objet, dans ces dernières années, de recherches nombreuses, entre autres d'un mémoire très important de M. De Donder (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, XV (1901), XVI (1902)). M. Appell, dans le 2<sup>me</sup> volume de son grand *Traité*, a fait aussi un court exposé de la théorie en vue des applications à la Mécanique et à Hydrodynamique. L'exposition de M. Whittaker n'est pas étendue ; elle se borne, d'une part, à l'étude des systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui possèdent un invariant intégral relatif et qui ont, par conséquent, la forme hamiltonienne ; elle donne, d'autre part, la détermination, d'après M. Poincaré, d'un invariant intégral dont l'ordre est égal à celui du système, détermination qui exige la connaissance du dernier multiplicateur du système.

Le succès des méthodes d'intégration des problèmes de la Dynamique est dû à la transformation et à la réduction à des systèmes avec un plus petit nombre de degrés de liberté ; de là la nécessité d'une étude approfondie de la théorie de la transformation des équations de la Dynamique (Chap. XI). D'ailleurs, la transformation des systèmes canoniques est étroitement liée à la transformation spéciale de contact, dont l'auteur étudie les propriétés les plus élémentaires. En effet, pendant le cours du mouvement, un système dynamique subit une transformation infinitésimale de contact ; le problème de l'intégration se réduit à un problème de transformation et toute la théorie se résume dans le théorème fondamental que les transformations de contact sont les seules qui conservent la forme hamiltonienne aux équations du mouvement. Dans tout ce chapitre, si nous ne nous trompons pas, l'auteur a mis à profit les recherches de Lie, Darboux, Poincaré, De Donder et Morera.

<sup>1</sup> La remarque générale se trouve seulement dans une note à la page 210. Dans cette partie, l'auteur attribue à M. de Sparre (Exer. 29, p. 169) le théorème que l'herpolhodie de Poincot n'a pas de point d'inflexion. Ce théorème est de M. Hess (*Das Rollen u. s. w.* München, 1880).

La recherche de la forme nouvelle du système canonique, exige la considération du premier système différentiel relatif à une forme pfaffienne ; de là, en quelques lignes et de la manière la plus naturelle, on trouve l'équation de Hamilton et le théorème célèbre de Jacobi, qui est fondamental pour tout le chap. XII sur les propriétés des intégrales des systèmes dynamiques. Toute intégrale complète de l'équation de Hamilton définit une transformation de contact et le problème de l'intégration est le même que celui de la recherche des transformations de contact qui transforment le système canonique en lui-même. Les propriétés des intégrales en involution conduisent au beau théorème de Liouville sur l'intégration d'un système dont on connaît  $n$  intégrales en involution.

Très à propos, l'auteur expose un beau théorème de M. Levi-Civita sur la manière de déduire des solutions particulières d'un système canonique dont on connaît des intégrales ou des relations invariantes. M. Bungatti en a donné une démonstration bien simple. L'auteur aurait dû mentionner la belle application que M. Levi-Civita a fait de son théorème à l'étude des mouvements permanents (au sens de M. Routh) d'un corps rigide, surtout dans le cas de la Kovalevskij<sup>1</sup>. Viennent ensuite les problèmes dynamiques qui admettent des intégrales d'une forme déterminée. Le cas d'une intégrale linéaire dans les composantes des vitesses a été considéré par M. Korkine et M. Pennachietti ; il a été aussi l'objet des recherches de M. Cerruti, qui, pour le cas d'un point libre ou mobile sur une surface, a donné des théorèmes bien élégants, qui auraient très bien figuré dans le livre de M. Whittaker (*Collect. math. in honor. D. Chelini, 1881*). Les problèmes qui admettent des intégrales quadratiques dans les vitesses, outre celui des forces vives, ne sont pas encore étudiés en général ; l'auteur se borne à rappeler un élégant théorème de M. Stäckel (généralisé par MM. Goursat et Bungatti). Le problème, cependant, a été résolu, pour  $n = 3$ , par M. Di Pirro (*Ann. Matem. 24 (2), 1896*), et M. Painlevé a fait connaître une classe remarquable de problèmes en question.

La dernière partie, enfin, est une introduction aux recherches modernes sur le problème des trois corps. On verra certainement avec plaisir l'élégance et la simplicité avec laquelle M. Whittaker, en suivant en partie M. Poincaré, a su exposer, en quelques pages, en s'aidant de la transformation de contact, les recherches de Lagrange et de Jacobi sur la réduction du système hamiltonien du 18<sup>me</sup> ordre, relatif au problème des trois corps, à un du 6<sup>me</sup>, dernière limite à laquelle, jusqu'à présent, on soit arrivé.

Les trois derniers chapitres sont consacrés aux objets suivants : le théorème de M. Bruns, d'après lequel il n'y a d'autres intégrales algébriques distinctes de celles bien connues ; celui de M. Poincaré, qui montre qu'il n'y a pas d'intégrales d'une certaine forme (et que l'auteur expose seulement pour le cas du problème restreint) ; l'étude de la forme et de la disposition des orbites des systèmes hamiltoniens et des solutions périodiques et de leur stabilité ; la théorie des exposants caractéristiques de M. Poincaré ; et enfin une méthode, due à l'auteur, pour l'intégration de tout problème dynamique par des séries trigonométriques.

Malheureusement les indications bibliographiques font presque entière-

<sup>1</sup> M. Viterbi vient de faire la même application au mouvement d'un corps dans un liquide indéfini lorsqu'ont lieu les intégrales de Clebsch ou de Liapounoff ou de Stekloff. (*Atti Ist. Veneto*, 62, 1902-903).

ment défaut dans le beau livre ; c'est une lacune que l'on ne saurait assez souhaiter de voir disparaître dans un ouvrage qui rendra certainement de grands services à tous ceux qui aiment à s'orienter dans les théories les plus modernes de la Dynamique analytique.

R. MARCOLONGO (Messine).

**La Revue du Mois.** — Revue mensuelle dirigée par M. EM. BOREL, 1<sup>re</sup> année 1906 ; prix de l'abonnement annuel : Paris, 20 fr. ; Union postale, 25 fr. ; prix du fascicule : 2 fr. 25 ; Librairie Le Soudier, Paris.

En fondant ce nouveau périodique la Rédaction a pensé qu'en raison du nombre et de l'importance des questions qui peuvent être traitées par méthode scientifique, il serait utile d'avoir une publication dont cette méthode serait le principe. Elle se propose de former une revue dont le but essentiel est de contribuer au développement des idées générales par l'exposition et l'étude critique des résultats nouvellement acquis. Mais ce but ne peut être atteint que si la publication est une revue de libre discussion, aussi la Rédaction annonce-t-elle qu'elle admettra « à s'exprimer en pleine indépendance toutes les opinions à base scientifique ».

Les deux premiers fascicules présentent une remarquable variété dans les articles, à tel point que toute personne instruite les lira avec grand intérêt et beaucoup de profit. Nos lecteurs en jugeront par la liste ci-dessous des mémoires insérés dans ces deux numéros :

N<sup>o</sup> 1. — VITO VOLTERRA : Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales. — ALF. CROISSET : L'enseignement laïque de la morale. — G. DARBOUX : La vie et l'œuvre de Charles Hermite. — EMILE BOURGEOIS : Au seuil de l'alliance franco-russe, I. — E. METCHNIKOFF : La mort naturelle dans le règne animal. — ET. FOURNOL : La codification du travail. — \*\*\* : Le haut commandement dans l'armée française.

N<sup>o</sup> 2. — G. BONNIER : Entre les cryptogames et les plantes à fleurs. — LUC. LEVY : Examens et examinateurs. — A. CHARRIN : Les oscillations de l'état physiologique. — EM. BOURGEOIS : Au seuil de l'alliance franco-russe, II. — A. JOB : Le mécanisme de l'oxydation. — H. HAUSER : La géographie humaine et l'histoire économique. — NOËL BERNARD : Un préjugé dans l'enseignement des sciences naturelles. — PERELLOS : L'instruction technique dans la marine.

Chaque numéro contient, en outre, une chronique scientifique et de la bibliographie.

Bien qu'il ne s'agisse pas d'une revue purement mathématique, nous avons cru utile, dans cette première annonce, de reproduire les sommaires des premiers fascicules. Avec de tels articles et ceux que l'on annonce pour les prochains numéros, la *Revue du Mois* est assurée de vivre et de trouver un excellent accueil dans tous les pays.

H. FEHR.