

# UNE LEÇON DE THERMODYNAMIQUE Sur les Cycles Réversibles.

Autor(en): **Veillon, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11859>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

bruit, mais je le recherchais. Ainsi je suis souvent monté en omnibus, sans avoir de but déterminé, parce que la trépidation bruyante, le brouhaha, venaient à mon aide pour achever une solution.

C'est à cette faculté de m'abstraire au milieu du bruit que se rattache l'utilité de la musique pour mon travail. Que de fois suis-je allé au concert sans y percevoir le plus petit morceau de musique, mais j'y travaillais très bien.

Voici à ce propos un souvenir absolument précis. Dès la première année de mon professorat je n'ai voulu employer dans mon enseignement que des démonstrations géométriques; mais je ne trouvais pas celle concernant la trace de la surface d'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle.

Un jour, fatigué par cette recherche et désireux de changer le cours de mes idées, j'entrai au Théâtre lyrique où on jouait la Traviata. Les premières mesures de l'orchestre arrivèrent seules à mes oreilles et l'obsédante question me reprit. En sortant du théâtre, sans doute la musique aidant, je possédais la solution désirée, mais je ne connaissais nullement la Traviata!

On voit par ce qui précède, que j'ai tout simplement travaillé selon ma nature.

Chacun agit de même . . . aussi je doute beaucoup que ma méthode de travail puisse modifier celle de n'importe qui.

---

## UNE LEÇON DE THERMODYNAMIQUE

### SUR LES CYCLES RÉVERSIBLES.

---

La notion du cycle réversible fut particulièrement féconde pour la thermodynamique. Elle servit de point de départ pour établir le principe de Carnot, appelé aussi le second principe de la théorie de la chaleur. En raison d'une pareille importance l'exposition du cycle réversible dans l'enseigne-

ment doit nécessairement faire l'objet de beaucoup de soins, et c'est à ce point de vue que nous croyons utiles les développements qui vont suivre. Nous y fûmes conduits au cours de leçons sur la thermodynamique.

Ainsi que le fait déjà observer CLAUSIUS<sup>1</sup>, chaque cycle réversible est susceptible d'une décomposition en une quantité de *cycles de Carnot* infiniment étroits, que nous nommerons *élémentaires*, et qui sont toujours limités par deux portions d'isothermes comprises entre deux adiabatiques voisines. Or cette décomposition d'un cycle quelconque en *cycles élémentaires* n'est pas la seule que l'on puisse imaginer ; il y en a au contraire six différentes qui s'offrent à l'esprit, comme nous allons tout de suite le rappeler. La raison qui conduit à choisir le cycle de Carnot est que celui-ci jouit de propriétés tout à fait spéciales, particulièrement en ce qui concerne le *rendement*, de propriétés, disons-nous, qui en font le plus avantageux de tous les cycles élémentaires. Le but que nous nous proposons ici est donc de passer en revue les cycles élémentaires typiques et fondamentaux afin de reconnaître en quoi ils diffèrent entre eux, et de mettre par cela même bien en évidence la supériorité du cycle de Carnot. Cette étude peut se faire par les procédés les plus élémentaires de l'analyse mathématique.

### Les six cycles fondamentaux.

Nous désignerons par  $v$ ,  $p$ ,  $T$ , le volume, la pression et la température absolue d'un corps, par  $c_v$ ,  $c_p$  ses deux chaleurs spécifiques. Nous pouvons faire passer le corps de quatre manières différentes, d'un état initial (indices 0) à un état final (indices 1) ; rappelons ces transformations ainsi que les équations qui s'y rapportent, la lettre  $Q$  représentant la quantité de chaleur mise en jeu dans chacune d'elles. Le lecteur imaginera la représentation graphique de *Clapeyron* dans chaque cas, exécutée avec le diagramme des volumes et des pressions.

<sup>1</sup> CLAUSIUS, *Die mechanische Wärmetheorie*, Vol. I, p. 92.

1. *Transformation isochore* :  $v = \text{const.}$ ,  $p$  et  $T$  variables.

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0} ; \quad Q = c_v(T_1 - T_0) .$$

La ligne figurative est *l'isochore*, une droite parallèle à l'axe des pressions supposée perpendiculaire.

2. *Transformation isobare* :  $p = \text{const.}$ ,  $v$  et  $T$  variables.

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{T_1}{T_0} ; \quad Q = c_p(T_1 - T_0) .$$

La ligne figurative est *l'isobare*; une droite parallèle à l'axe des volumes, imaginée horizontale.

3. *Transformation isothermique* :  $T = \text{const.}$ ,  $v$  et  $p$  variables.

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0}{p_1} \quad (\text{loi de Mariotte}) ; \quad Q = RT \log \frac{p_0}{p_1} = RT \log \frac{v_1}{v_0} ,$$

où  $R$  désigne la constante individuelle du gaz, lorsqu'il s'agit d'un corps à l'état gazeux. La courbe figurative est *l'isotherme*, une hyperbole équilatère avec les axes des volumes et des pressions comme asymptotes.

4. *Transformation adiabatique* :  $v$ ,  $p$  et  $T$  sont variables et la quantité de chaleur mise en jeu est nulle. On a ici les relations de Poisson :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} ; \quad \frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{v_0}{v_1} \right)^k ,$$

où  $k$  est le rapport entre les deux chaleurs spécifiques. La courbe représentative est *l'adiabatique*, sorte de courbe hyperbolique, comprenant l'isotherme à titre de cas particulier lorsque  $k = 1$ .

En combinant maintenant deux à deux ces quatre modes de transformation pour en faire des cycles, on obtiendra les six cycles suivants :

- Cycle I isotherme-adiabatique (Carnot).
- Cycle II adiabatique-isochore.
- Cycle III adiabatique-isobare.
- Cycle IV isotherme-isochore.
- Cycle V isotherme-isobare.
- Cycle VI isobare-isochore.

Les diagrammes figuratifs sont des quadrilatères. Suivant l'angle auquel elles se rapportent, les valeurs de  $p$ ,  $v$ ,  $T$ , seront affectées des indices 0, 1, 2, 3. Nous allons maintenant démontrer qu'il existe entre ces douze quantités (pression, volume et température à chaque angle) trois relations fort simples et générales, applicables à chacun des six cycles fondamentaux.

On peut envisager avec ZEUNER<sup>1</sup> les courbes isochores, isobares, isothermes et adiabatiques comme cas particuliers d'une courbe très générale, nommée *courbe polytropique* du type :

$$pv^m = \text{const.}$$

$m$  désignant un exposant arbitraire, et la constante étant déterminée par les conditions initiales au départ. En particulier  $m = \infty$  donne l'isochore,  $m = 0$  l'isobare,  $m = 1$  l'isotherme,  $m = k$  l'adiabatique. Dans le cas où  $k > 1$  l'adiabatique tombe avec plus de rapidité que l'hyperbole équilatère ; c'est le cas le plus commun. Chacun de nos cycles pourra donc être considéré comme limité par deux courbes polytropiques possédant l'exposant commun  $m$  et par deux autres avec un exposant également commun, mais différent,  $n$ .

Supposons maintenant les points 0 et 2 connus, c'est-à-dire  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $v_2$ ,  $p_2$  donnés, nos quatre polytropiques pourront s'écrire :

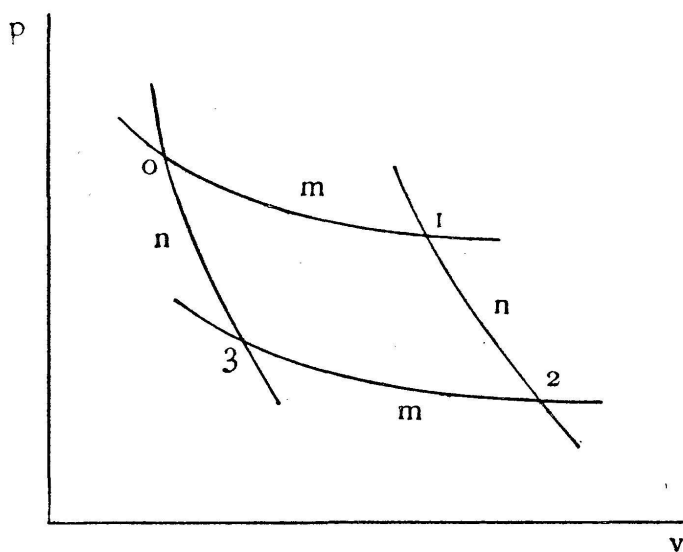


Fig. 1.

$$pv^m = p_0 v_0^m,$$

$$pv^n = p_0 v_0^n,$$

$$pv^m = p_2 v_2^m,$$

$$pv^n = p_2 v_2^n.$$

<sup>1</sup> WEYRAUCH, *Grundriss der Wärmetheorie*, vol. I, p. 54.

En combinant la première et la quatrième de ces équations nous obtiendrons les valeurs des inconnues  $v$  et  $p$  à l'angle 1, soit  $v_1$  et  $p_1$ . La combinaison des deux autres équations fournira les valeurs de  $v$  et  $p$  à l'angle 3, soit  $v_3$  et  $p_3$ . Une fois ces valeurs calculées formons les produits  $v_1 v_3$  et  $p_1 p_3$  on trouvera les intéressantes et fort simples relations :

$$v_1 v_3 = v_0 v_2 \quad (1)$$

$$p_1 p_3 = p_0 p_2 \quad (2)$$

Passons maintenant aux températures et on verra que l'on peut établir une relation absolument semblable. Les équations de Poisson fourniront, en y substituant  $m$  (ou  $n$ ) à  $k$  :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{m-1}, \quad \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_3}\right)^{m-1}$$

En les multipliant terme par terme et en tenant compte de (1) on trouve en effet :

$$T_1 T_2 = T_0 T_3 \quad (3)$$

Nous exprimerons ce résultat en disant que *dans tout cycle élémentaire le produit des volumes, des pressions et des températures absolues, suivant une diagonale, est constant.*

Passons maintenant à l'étude des six cycles typiques fondamentaux. Nous les imaginerons toujours parcourus de telle façon qu'un observateur, marchant sur le contour, ait la surface à sa droite, les angles se succédant dans l'ordre 0, 1, 2, 3, 0. La chaleur empruntée à la source chaude sera alors supérieure à celle cédée à la source froide et la machine aura *fourni* un travail extérieur. Nous désignerons toujours par  $T_0$  la température la plus élevée, et par  $T_2$  la plus basse que l'on rencontre en parcourant le cycle, tandis que  $T_1$  et  $T_3$ , s'il y a lieu, seront les températures intermédiaires. En outre  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$  seront les quantités de chaleur mises en jeu entre les coins 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, 3 et 0 du diagramme. Enfin  $Q$  sera le travail extérieur fourni par la machine, et pour fixer les idées, nous supposerons cette dernière être formée par l'unité de masse de la substance, par exemple

par 1 gr. d'air. Nous considérerons comme quantités données les températures extrêmes,  $T_0$  et  $T_2$ , ainsi que le volume et la pression dans l'angle correspondant à l'état initial. Or ces quatre quantités données ne suffiront pas à la solution des problèmes, comme on verra, et il faudra toujours avoir recours au choix d'une cinquième que nous nommerons la *constante arbitraire*. Les inconnues à chercher se composeront des volumes, pressions et températures aux autres angles du diagramme, ainsi que de toutes les quantités de chaleur mises en jeu et enfin du rendement. Nous appellerons

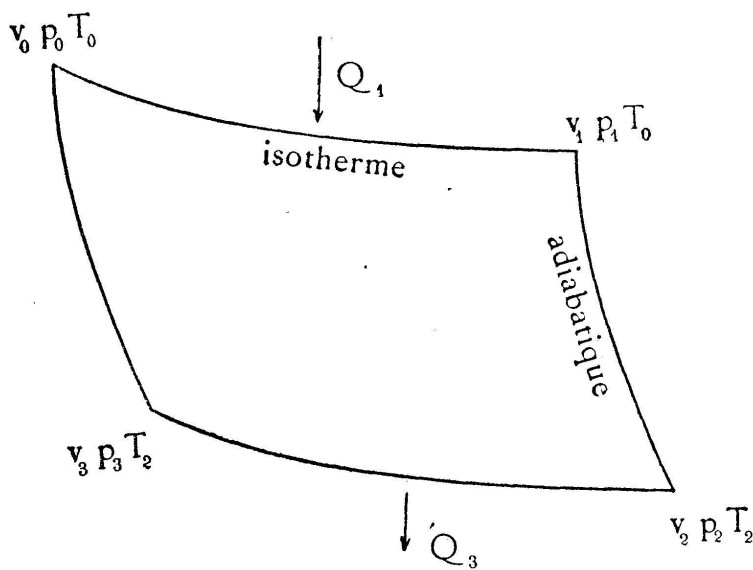


Fig. 2.

ce dernier  $H$  dans le cycle de Carnot et  $\eta$  dans les autres.

**Cycle I, isotherme-adiabatique. (Carnot).** — *Donné :*  $v_0, p_0, T_0, T_2$ , arbitraire  $v_2$ . — *Cherché :*  $v_1, v_3, p_1, p_2, p_3$ .

Nous disposons des cinq équations suivantes :

$$\text{isotherme : } \frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0}{p_1}$$

$$\text{adiabatique : } \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} = \frac{T_2}{T_0}, \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_2}{T_0};$$

$$\text{générale : } v_1 v_3 = v_0 v_2, \quad p_1 p_3 = p_0 p_2.$$

Le calcul donne les résultats suivants :

$$\text{Angle 1. } \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_2 \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ p_1 = \frac{v_0 p_0}{v_2} \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \end{array} \right. \quad \text{Angle 3. } \left\{ \begin{array}{l} v_3 = v_0 \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ p_3 = p_0 \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \end{array} \right.$$

Angle 2.  $p_2 = \frac{v_0 p_0}{v_2} \frac{T_2}{T_0}$

$Q_1 = RT_0 \log \frac{v_1}{v_0}$ ,  $Q_3 = RT_2 \log \frac{v_1}{v_0}$ ,

$Q = R(T_0 - T_2) \log \left[ \frac{v_2}{v_0} \left( \frac{T_2}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right]$ ,  $H = 1 - \frac{T_2}{T_0}$ .

L'équation pour Q permet de constater, et cela est très important, que pour une valeur déterminée de l'arbitraire  $v_2$  il ne résulte qu'une seule valeur pratiquement possible du travail fourni Q, et que vice-versa pour une valeur prescrite de Q il n'existe qu'une solution pour  $v_2$ .

L'équation pour H n'offre lieu à aucune remarque sinon qu'elle exprime le fait bien connu que le rendement ne dépend que des deux températures extrêmes des sources. Nous formulerons donc la règle: *Une machine réversible évoluant une fois suivant un cycle de Carnot entre les températures  $T_0$  et  $T_2$  peut fournir n'importe quel travail extérieur avec un rendement invariable ne dépendant que de ces températures.*

Les formules trouvées permettront en outre d'effectuer le diagramme représentatif soit pour une valeur donnée de la quantité arbitraire  $v_2$ , soit pour une valeur prescrite de Q.

**Cycle II, adiabatique-isochoire.** — *Donné:*  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $T_2$ , arbitraire:  $T_1$ . — *Cherché:*  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $T_3$ .

Nous disposons des cinq équations suivantes :

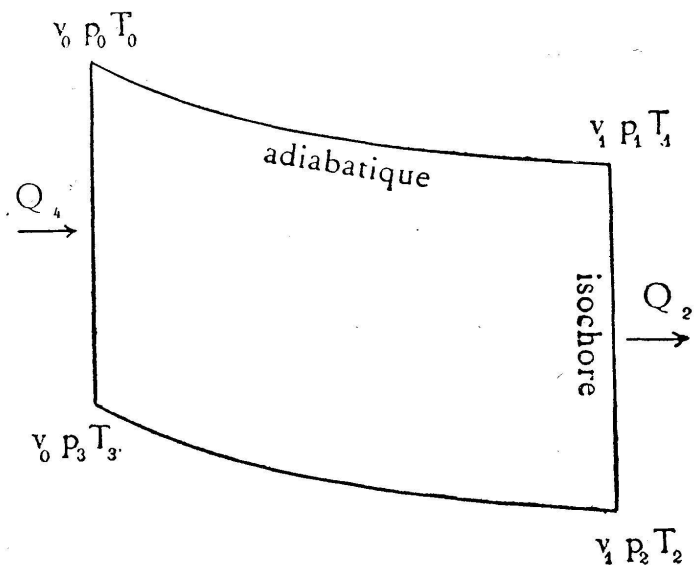


Fig. 3.

isochoire :  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$  ;

adiabatique :  $\left( \frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} = \frac{T_1}{T_0}$ ,  $\left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_1}{T_0}$  ;

générale :  $p_1 p_2 = p_0 p_3$ ,  $T_1 T_3 = T_0 T_2$ .



Le calcul fournit les résultats suivants :

$$\text{Angle 1.} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_0 \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ p_1 = p_0 \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \end{array} \right. \quad \text{Angle 3.} \left\{ \begin{array}{l} p_3 = p_0 \frac{T_2}{T_1} \\ T_3 = \frac{T_0 T_2}{T_1} \end{array} \right.$$

$$\text{Angle 2.} \quad p_2 = p_0 \frac{T_1^{\frac{1}{k-1}} \cdot T_2}{T_0^{\frac{k}{k-1}}}.$$

$$Q_1 = c_v (T_0 - T_3) = c_v \cdot \frac{T_0}{T_1} (T_1 - T_2) ; \quad Q_2 = c_v (T_1 - T_2)$$

$$Q = c_v \cdot \frac{1}{T_1} (T_0 - T_1) (T_1 - T_2) ; \quad \eta = 1 - \frac{T_1}{T_0}.$$

Ici les choses se passent tout différemment que dans le cycle de Carnot. Pour une valeur donnée de l'arbitraire  $T_1$  il n'existe qu'une seule valeur du travail extérieur  $Q$ , mais si vice-versa nous prescrivons une valeur déterminée au travail extérieur  $Q$  il en résultera deux valeurs distinctes pour la première température de passage  $T_1$ , car l'expression pour  $Q$  est du second degré en  $T_1$ . Mettons-la sous la forme :

$$T_1^2 - \left( T_0 + T_2 - \frac{Q}{c_v} \right) T_1 + T_0 T_2 = 0 ;$$

il en résulte immédiatement que les deux valeurs distinctes de la première température de passage obéissent aux conditions suivantes, si nous les désignons par  $T_1'$  et  $T_1''$

$$\left. \begin{array}{l} T_1' T_1'' = T_0 T_2, \\ T_1' + T_1'' = T_0 + T_2 - \frac{Q}{c_v}. \end{array} \right\}$$

A chacune de ces températures de passage dans l'angle 1, correspond une température de passage dans l'angle 3, nommons-les  $T_3'$  et  $T_3''$  on trouvera pour celles-ci les conditions

identiques, savoir :

$$\left. \begin{aligned} T_3' T_3'' &= T_0 T_2, \\ T_3' + T_3'' &= T_0 + T_2 - \frac{Q}{c_v}. \end{aligned} \right\}$$

De ces deux systèmes il résulte :

$$\left. \begin{aligned} T_1' T_1'' &= T_3' T_3'', \\ T_1' + T_1'' &= T_3' + T_3''. \end{aligned} \right\}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\left. \begin{aligned} T_1' &= T_3'', \\ T_1'' &= T_3'. \end{aligned} \right\}$$

Reportons notre attention maintenant sur la formule qui exprime le rendement. Celui-ci dépend de la température de passage  $T_1$ , sera par conséquent dépendant de laquelle des deux valeurs  $T_1'$  ou  $T_1''$  on choisit pour obtenir le travail prescrit  $Q$ . Appelons  $\eta'$  et  $\eta''$  ces deux valeurs on verra sans peine qu'elles satisfont à la condition fort élégante :

$$(1 - \eta')(1 - \eta'') = \frac{T_2}{T_0},$$

ou bien :

$$(1 - \eta')(1 - \eta'') = 1 - H.$$

Rappelons enfin que le complément du rendement à l'unité se nomme le coefficient de perte et nous pourrions formuler le résultat ainsi :

*Une machine réversible parcourant un cycle du type II entre les températures extrêmes  $T_0$  et  $T_2$  pourra fournir un travail extérieur prescrit  $Q$  de deux manières différentes. Les températures de passage  $T_1$  et  $T_3$  seront égales, mais interverties dans les deux cas. Les rendements seront toujours inférieurs à celui de Carnot mais le produit des coefficients de perte dans les deux cas sera égal au coefficient de perte dans le cycle de Carnot.*

L'équation du second degré en  $T_1$  permet d'approfondir encore la différence entre le cycle qui nous occupe et celui

de Carnot. On peut rechercher la valeur de  $T_1$  rendant  $Q$  maximum. A cet effet il suffit de poser :

$$\frac{dQ}{dT_1} = c_v \left( \frac{T_0 T_2}{T_1^2} - 1 \right) = 0,$$

d'où il résulte que le travail extérieur devient maximum pour la valeur particulière

$$T_1 = T_3 = \sqrt{T_0 T_2}.$$

Cette valeur de  $Q$  est elle-même :

$$Q_{\max} = c_v (\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2})^2.$$

Désignons enfin par  $z$  le rendement relatif à ce cas, on trouve :

$$z = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_0}} \quad \text{ou bien :} \quad 1 - z = \sqrt{1 - H}.$$

Ce résultat peut s'énoncer ainsi : *Le cycle du type II ne peut fournir entre les températures extrêmes  $T_0$  et  $T_2$  qu'un certain maximum de travail extérieur, et cela d'une seule manière. Les deux températures de passage  $T_1$  et  $T_3$  sont égales à la moyenne géométrique des températures extrêmes. Le rendement, toujours inférieur à celui de Carnot, est alors tel que le coefficient de perte est égal à la racine carrée du coefficient de perte de Carnot.*

On peut enfin établir une intéressante relation entre le diagramme pour  $Q_{\max}$  et les deux diagrammes fournis par la double solution du problème lorsque  $Q$  est supposé affecter une autre valeur (plus petite).

En calculant les coordonnées des angles nous trouvons pour  $Q_{\max}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Angle 1.} \\ \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_0 \sqrt{\left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}} \\ p_1 = p_0 \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{Angle 3.} \left\{ \begin{array}{l} p_3 = p_0 \sqrt{\frac{T_2}{T_0}} \\ T_3 = \sqrt{T_0 T_2} \end{array} \right.$$

$$\text{Angle 2.} \quad p_2 = p_0 \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{2k-1}{k-1}}}$$

Pour une autre valeur de  $Q$  les formules générales pour les angles écrites au commencement de ce paragraphe fourniront deux tableaux analogues. L'un s'obtiendra en remplaçant dans les formules générales  $T_1$  et  $T_3$  par  $T'_1$  et  $T'_3$ , l'autre en remplaçant ces mêmes lettres par  $T''_1$  et  $T''_3$ . Supposons ces deux tableaux écrits et désignons les valeurs correspondantes par :

$$v'_1, v''_1, p'_1, p''_1, v'_2, v''_2, p'_3, p''_3.$$

Nous trouverons très aisément :

$$\begin{aligned} \text{pour les Angles 1.} \quad & \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{v'_1 v''_1}, \\ p_1 &= \sqrt{p'_1 p''_1}; \end{aligned} \right. & \text{pour les Angles 3.} \quad & \left\{ \begin{aligned} p_3 &= \sqrt{p'_3 p''_3}, \\ T_3 &= \sqrt{T'_3 T''_3}; \end{aligned} \right. \\ & & \text{pour les Angles 2.} \quad & p_2 = \sqrt{p'_2 p''_2}. \end{aligned}$$

Et enfin pour la température de passage  $T_1$  dans le cas de  $Q_{\max}$ ,

$$T_1 = \sqrt{T'_1 T''_1}$$

c'est-à-dire : *Les volumes, les pressions et les températures dans les angles du diagramme pour  $Q_{\max}$  sont les moyennes géométriques des quantités correspondantes dans les angles similaires des deux diagrammes pour toute autre valeur de  $Q$ .*

En poursuivant encore on trouvera que :

$$1 - z = \sqrt{(1 - \eta')(1 - \eta'')}$$

c'est-à-dire : *Le coefficient de perte pour  $Q_{\max}$  est la moyenne géométrique entre les coefficients de perte dans les deux cas de la solution correspondant à une autre valeur de  $Q$ .*

Telles sont les considérations qu'il faut faire pour s'assurer de la supériorité du cycle de Carnot sur celui du type II. Bien qu'un peu longues nous ne les croyons pas inutiles.

**Cycle III, adiabatique-isobare.** — *Donné* :  $v_1, p_0, T_0, T_2$ , arbitraire :  $T_1$ . — *Cherché* :  $v_0, v_2, v_3, p_2, T_3$ .

Nous pouvons nous dispenser d'effectuer le calcul, tout

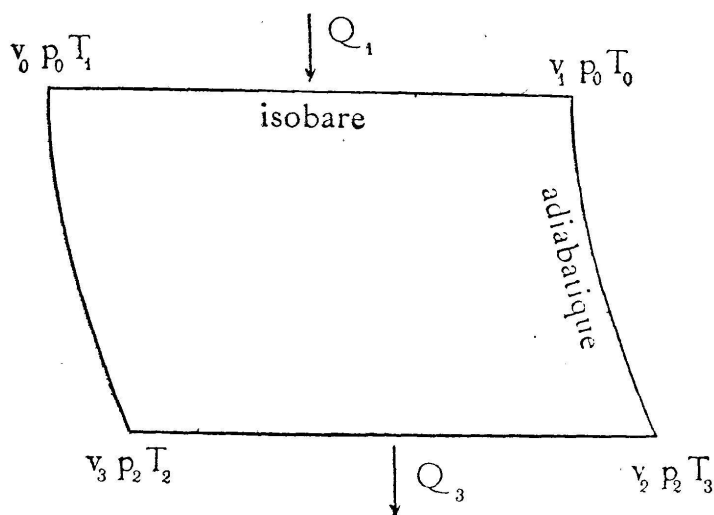


Fig. 4.

se passant comme dans le cycle II. En particulier toutes les conséquences restent les mêmes. Remarquons seulement que la température la plus élevée  $T_0$  doit être appliquée à l'angle 1, la plus basse  $T_2$  à l'angle 3.

On aura de nouveau cinq équations pour déterminer les inconnues, dans les valeurs de  $Q_1$ ,  $Q_3$  et  $Q$  figurera  $c_p$  au lieu de  $c_v$ ; enfin dans la formule du rendement  $\frac{T_1}{T_0}$  sera remplacé par  $\frac{T_2}{T_1}$ .

**Cycle IV, isotherme-isochoire.** — (Principe de la machine à régénérateur de Stirling). — *Donné* :  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $T_2$ ; arbitraire :  $v_1$ . — *Cherché* :  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .

Ce problème n'offre que trois inconnues et on ne dispose en effet que de trois équations :

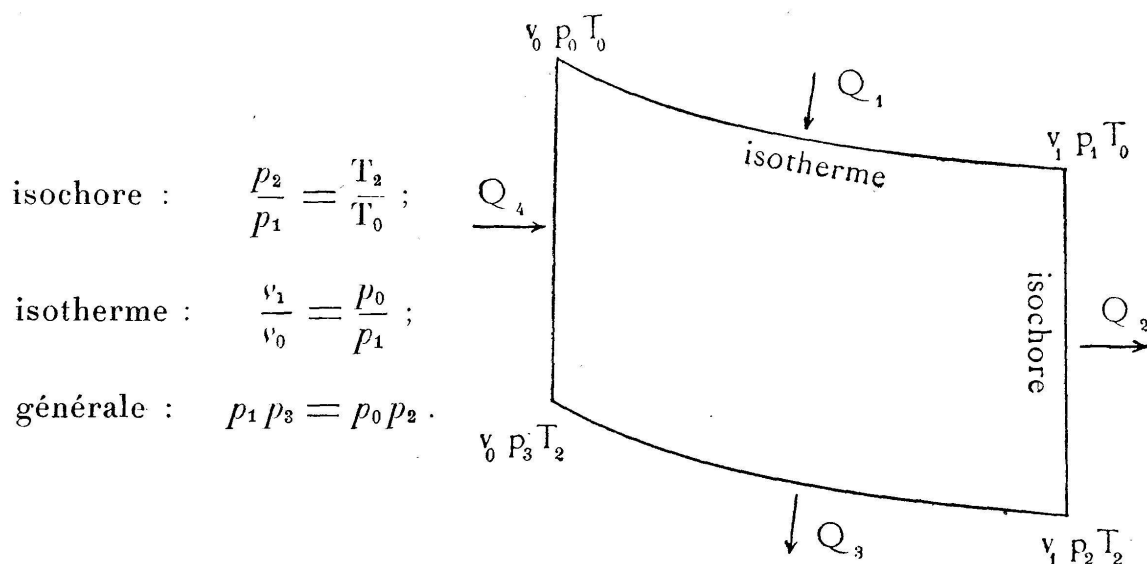


Fig. 5.

$$\text{isochoire : } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_0} ;$$

$$\text{isotherme : } \frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0}{p_1} ;$$

$$\text{générale : } p_1 p_3 = p_0 p_2 .$$

Le calcul fournit les solutions :

$$\text{Angle 1 : } p_1 = p_0 \frac{v_0}{v_1} ; \quad \text{Angle 3 : } p_3 = p_0 \frac{T_2}{T_0} ;$$

$$\text{Angle 2 : } p_2 = \frac{p_0 v_0}{v_1} \cdot \frac{T_2}{T_0} .$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= RT_0 \log \frac{v_1}{v_0}, & Q_4 &= c_v (T_0 - T_2) \\
 Q_3 &= RT_2 \log \frac{v_1}{v_0}, & Q_2 &= c_v (T_0 - T_2) \\
 Q &= R (T_0 - T_2) \log \frac{v_1}{v_0}.
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} Q_4 \\ Q_2 \end{array} \right\} = q,$$

Pour le travail extérieur le cycle IV est pareil à celui de Carnot ; à chaque valeur de  $v_1$  il ne correspond pratiquement qu'une seule valeur de  $Q$ , et vice-versa une valeur quelconque prescrite de  $Q$  peut s'obtenir d'une manière unique par le choix convenable de  $v_1$ .

La différence d'avec le cycle de Carnot se trouve dans le rendement. Celui-ci serait théoriquement :

$$\eta = \frac{Q}{Q_1 + q},$$

c'est-à-dire toujours inférieur à  $H$ . Mais les quantités  $Q_4$  et  $Q_2$  sont égales entre elles ; nous les avons désignées par  $q$ . Or c'est ici que le *régénérateur* entre en fonction ; après la moitié du parcours il a reçu  $q$  et à la fin du parcours entier il a rendu  $q$ . Cette quantité  $q$  n'entre donc pas effectivement dans le rendement, car elle n'est empruntée à aucune des sources. Le rendement doit alors s'écrire :

$$\eta = \frac{Q}{Q_1}, \quad \text{ou} \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_0} = H.$$

Dans ces conditions on voit donc que le cycle IV peut fournir la même chose que celui de Carnot, mais cela à la condition expresse que l'on dispose d'un régénérateur parfait. Notre but étant d'établir la comparaison entre tous les cycles, nous avons été obligés de relater ici ces choses bien connues du reste.

**Cycle V, isotherme-isobare.** — (Principe de la machine d'Ericc-

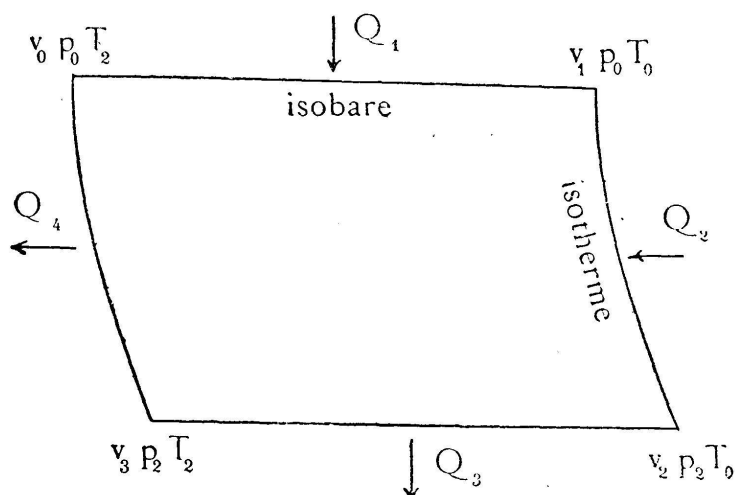


Fig. 6.

son.) — *Donné* :  $v_1, p_0, T_0, T_2$ ; arbitraire  $p_2$ . — *Cherché* :  $v_0, v_2, v_3$ .

Ce cycle se comporte vis-à-vis du précédent exactement comme le III par rapport au II, et cela nous dispensera de tout nouveau commentaire. Dans les formules  $c_v$  sera remplacé par  $c_p$ .

**Cycle VI, isobare-isochores.** — *Donné* :  $p_0, v_1, T_0, T_2$ ; arbitraire  $T_1$ . — *Cherché* :  $v_0, p_1, T_3$ .

On dispose des relations :

$$\text{isobare : } \frac{v_1}{v_0} = \frac{T_0}{T_1};$$

$$\text{isochores : } \frac{p_1}{p_0} = \frac{T_2}{T_1};$$

$$\text{générale : } T_1 T_3 = T_0 T_2.$$

Solution du problème :

$$\text{Angle 0 : } v_0 = v_1 \frac{T_1}{T_0}, \quad \text{Angle 2 : } p_1 = p_0 \frac{T_2}{T_1},$$

$$\text{Angle 3 : } T_3 = \frac{T_0 T_2}{T_1};$$

$$Q_1 = c_p (T_0 - T_1), \quad Q_4 = c_v (T_1 - T_2),$$

$$Q_3 = c_p (T_3 - T_2), \quad Q_2 = c_v (T_0 - T_3),$$

$$Q = (c_p - c_v) (T_0 - T_1 + T_2 - T_3),$$

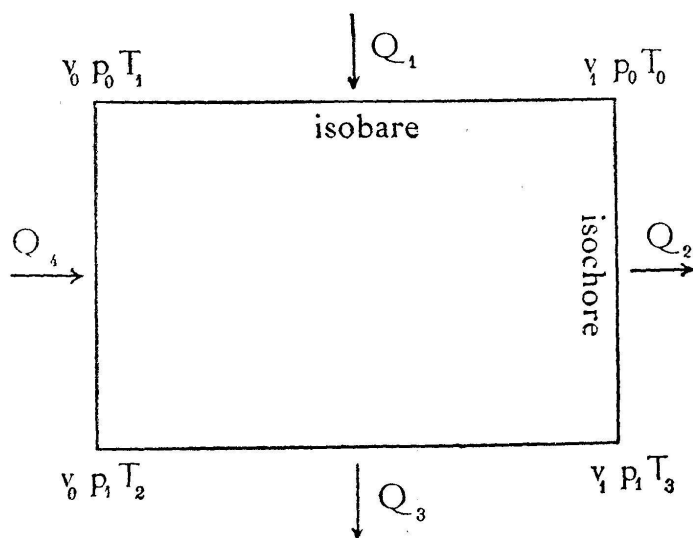


Fig. 7.

ou bien en éliminant  $T_3$  :

$$Q = (c_p - c_v) \frac{1}{T_1} (T_0 - T_1) (T_1 - T_2).$$

Pour le rendement on trouvera facilement :

$$\eta = \frac{1}{T_1} \frac{(c_p - c_v) (T_0 - T_1) (T_1 - T_2)}{c_p (T_0 - T_1) + c_v (T_1 - T_2)}.$$

Ces expressions pour  $Q$  et  $\eta$  sont fort élégantes, mais la présence simultanée de  $c_p$  et de  $c_v$  en rend la discussion un peu compliquée. En premier lieu nous voulons démontrer que le rendement  $\eta$  est ici toujours inférieur à  $H$  du cycle de Carnot. On y parvient en recherchant la valeur de la température arbitraire de passage qui rend  $\eta$  maximum et en calculant ensuite ce maximum lui-même. Ecrivons dans ce but :

$$\eta = (c_p - c_v) \frac{T_0 T_1 - T_1^2 - T_0 T_2 + T_1 T_2}{c_p T_0 T_1 - c_p T_1^2 + c_v T_1^2 - c_v T_1 T_2},$$

et formons ensuite l'expression :

$$\frac{d\eta}{dT_1} = 0.$$

Comme dans ce calcul nous n'aurons usage que du numérateur, nous nous bornerons à l'indiquer seul. On trouve :

$$\begin{aligned} \text{numérateur} &= c_p (T_0^2 T_2 - 2T_0 T_1 T_2 + T_1^2 T_2) \\ &\quad - c_v (T_0 T_1^2 - 2T_0 T_1 T_2 + T_0 T_2^2); \\ \text{numérateur} &= c_p T_2 (T_0 - T_1)^2 - c_v T_0 (T_1 - T_2)^2. \end{aligned}$$

En égalant à zéro cette expression, on trouve :

$$\frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_2} = \frac{\sqrt{c_v T_0}}{\sqrt{c_p T_2}},$$

équation linéaire en  $T_1$  dont la solution fournit la valeur cherchée de  $T_1$  qui rend  $\eta$  maximum :

$$T_1, \eta_{\max} = \frac{T_0 \sqrt{c_p T_2} + T_2 \sqrt{c_v T_0}}{\sqrt{c_p T_2} + \sqrt{c_v T_0}}.$$

La température de passage dans l'angle opposé est alors :

$$T_2, \eta_{\max} = \frac{T_2 \sqrt{c_p T_0} + T_0 \sqrt{c_v T_2}}{\sqrt{c_p T_0} + \sqrt{c_v T_2}}.$$



Enfin pour le rendement lui-même on trouvera l'expression

$$\eta_{\max} = \frac{T_0 - T_2}{\left( \sqrt{\frac{c_p}{c_p - c_v} \cdot T_0} + \sqrt{\frac{c_v}{c_p - c_v} \cdot T_2} \right)^2},$$

qui montre que le dénominateur est certainement  $> T_0$ , d'où il résulte que :

$$\eta_{\max} < \frac{T_0 - T_2}{T_0}, \quad \text{ou bien} \quad \eta_{\max} < H.$$

Remarquons qu'on peut aussi reconnaître que  $\eta_{\max}$  est non seulement inférieur à  $H$ , mais aussi à  $\eta$  de n'importe quel autre cycle.

Nous pouvons donc formuler : *Le rendement du cycle VI reste toujours inférieur à celui de l'un quelconque des autres cycles.*

Reste encore à calculer  $Q$  pour le cas du maximum de  $\eta$  ; on trouve

$$Q_{\eta_{\max}} = (c_p - c_v) \frac{(T_0 - T_2)^2}{T_0 + \frac{c_p + c_v}{\sqrt{c_p c_v}} \sqrt{T_0 T_2} + T_2}.$$

Nous pourrions chercher à calculer les coordonnées des angles du diagramme correspondant, mais nous voulons nous en abstenir.

Revenons à la formule générale pour  $Q$ . Elle peut être envisagée comme étant la différence des deux expressions correspondantes dans les cycles II et III. Les remarques faites là-bas s'appliqueront immédiatement ici. Il doit exister une valeur maxima de  $Q$ , elle est :

$$Q_{\max} = (c_p - c_v) (\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2})^2,$$

et la température de passage  $T_1$  obéit à la même condition. Pour une autre valeur prescrite de  $Q$  on retrouve deux solutions, l'une avec les températures de passage  $T'_1$  et  $T'_2$ , l'autre avec  $T''_1$  et  $T''_2$  qui obéissent à des relations écrites sous II et III, à cette différence près, que  $(c_p - c_v)$  remplace  $c_p$  resp.  $c_v$ . Enfin ce qui a été dit sur la relation existant entre la solution

$Q_{\max}$  et les deux solutions pour une valeur quelconque prescrite de  $Q$  reste la même chose ici. Nous pouvons donc nous dispenser de refaire les développements, mais nous remarquerons pour terminer que le rendement relatif au cas  $Q_{\max}$  devient ici assez compliqué tout en étant susceptible d'une forme assez élégante, il est :

$$z = (c_p - c_v) \frac{\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2}}{c_p \sqrt{T_0} + c_v \sqrt{T_2}}.$$

**Résumé.** — 1. Les cycles I et VI occupent des places spéciales et diffèrent essentiellement; les cycles II et III d'une part, IV et V d'autre part forment deux groupes dont le premier présente des analogies avec VI et le second avec I.

2. Les cycles I, IV, V permettent d'obtenir un travail extérieur aussi grand que l'on veut, tandis que II, III, VI ne permettent jamais de dépasser un certain maximum.

3. Une valeur prescrite du travail extérieur ne peut s'obtenir que d'une seule manière avec I, IV, V, mais de deux manières différentes avec II, III, VI.

4. Pour II, III, VI les solutions répondant au maximum du travail sont en quelque sorte les moyennes géométriques de chaque solution ambiguë répondant à toute autre valeur inférieure du travail.

5. Le rendement de I est le plus élevé possible. Celui de IV et V lui est égal à condition de laisser hors cause la chaleur circulant dans le régénérateur.

6. Les rendements de II, III, VI dépendent des valeurs exigées pour le travail extérieur. Leurs maxima ne correspondent cependant pas avec les maxima du travail.

7. De tous les cycles fondamentaux c'est donc VI qui est le moins favorable tandis que I présente les plus grands avantages. Le rôle prépondérant du cycle de Carnot en thermodynamique se trouve ainsi parfaitement justifié.

**Exemple numérique.** — Nous nous bornerons à donner un exemple pour les maxima du travail extérieur que l'on peut obtenir avec les cycles fondamentaux. Supposons que le corps destiné à évoluer selon chacun des cycles soit 1 gramme d'air

atmosphérique dans les conditions initiales de 0° centigrade et 1 atmosphère de pression. Les températures extrêmes sont choisies être 0° et 100° centigrade. On trouvera dans le tableau ci-après pour chaque opération les températures aux quatre angles, indiquées en degrés centigrade ( $t$  au lieu de  $T$ ), le travail  $Q$  en grammes-calories et le rendement. Nous avons commencé par calculer le maximum de  $Q$  pour les cycles II, III et VI qui sont seuls à en présenter. Le plus élevé de ces maxima se trouve être 1,8 cal. ; pour les cycles n'ayant pas de maximum fini du travail, le calcul a été effectué en supposant comme travail prescrit à effectuer cette même valeur de 1,8 cal. Remarquons enfin que pour le cycle VI on a encore calculé le cas du maximum de rendement.

Cycle.	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	Travail.	Rendement.
I Carnot. . . . .	100°	—	0°	—	1,8	0,27
II adiabatique-isochoire	100°	46°	0°	46°	1,3 (max)	0,14
III adiabatique-isobare.	100°	46°	0°	46°	1,8 (max)	0,14
IV isotherme-isochoire .	100°	—	0°	—	1,8	0,27
régénérateur . . .					$q = 16,9$	
V isotherme-isobare. . .	100°	—	0°	—	1,8	0,27
régénérateur . . .					$q = 23,8$	
VI isochoire-isobare . .	100°	46°	0°	46°	0,534 (max)	0,0259
	100°	42°	0°	50°	0,530	0,0261 (max)

H. VEILLON (Bâle).

## SUR UN CAS DE DISCONTINUITÉ

1. — M. Darboux a écrit, au début de son important mémoire sur les fonctions discontinues<sup>1</sup> : « Bien des points que l'on regarderait comme évidents, ou que l'on accorderait dans les applications de la Science aux fonctions usuelles, doivent

<sup>1</sup> *Annales de l'École Normale*, 1875.