

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES TRANSCENDANTES PLANES DONT LES ÉQUATIONS SONT A COORDONNÉES SÉPARÉES  
**Autor:** Turrière, Émile  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15526>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES TRANSCENDANTES PLANES DONT LES ÉQUATIONS SONT A COORDONNÉES SÉPARÉES

---

Dans des articles récents insérés dans l'*Enseignement mathématique*, j'ai signalé l'intérêt de la classification des courbes transcendantes particulières qui résulte des beaux travaux de CHASLES et de FOURET sur les caractéristiques des systèmes de courbes planes, de CLEBSCH-LINDEMANN sur les connexes algébriques et de M. GINO LORIA sur les courbes panalgébriques. Entre la *Géométrie analytique* qui fut, dans ces derniers temps, développée d'une manière excessive et la *Géométrie supérieure*, une place est certainement due à l'étude de la Géométrie supérieure plane, c'est-à-dire des applications des équations différentielles aux courbes spéciales remarquables transcendentes ou algébriques. Parmi les multiples résultats qui ont été obtenus relativement aux courbes transcendentes, j'ai trouvé trop peu de traces de recherches concernant leurs constructions effectives.

L'Antiquité nous a transmis de belles solutions de divers problèmes de constructions géométriques ; les questions de cette nature n'ont jamais cessé de préoccuper les géomètres et nous possédons actuellement un très grand nombre de constructions géométriques de courbes algébriques point par point, ou tangente par tangente. Mais en ce qui concerne les courbes transcendentes, par suite de l'impossibilité de les construire au moyen de la règle et du compas, des considérations analogues font défaut.

Aussi ai-je cru devoir consacrer quelques recherches à l'étude de la construction effective des courbes transcendentes planes. La question se pose sous la forme suivante :

1° Une courbe transcendante plane est supposée matériellement réalisée ; on en possède un gabarit, par exemple. Quelles sont les courbes transcendentes remarquables qu'il est possible d'en faire dériver en effectuant des constructions élémentaires au moyen de la règle et du compas ?

Connaissant les tangentes et les centres de courbure de la courbe primitive en ses divers points, sera-t-il possible de con-

struire élémentairement les mêmes éléments pour les courbes transformées ?

2° Réciproquement, l'étude d'une courbe transcendante étant imposée, choisir le plus simplement possible une courbe primitive dont on puisse la faire dériver, au sens qui précède.

Le problème ainsi posé est évidemment un cas particulier de la théorie des groupes de courbes se déduisant les unes des autres par des transformations rationnelles : les constructions élémentaires au moyen de la règle et du compas s'expriment en effet par des formules de transformations rationnelles. Inversement, au contraire, une transformation rationnelle ne peut en général être effectuée à l'aide de constructions élémentaires.

Il résulte donc de ce qui précède qu'une construction élémentaire laissera invariant l'ordre minimum de l'équation rationnelle satisfaite par une courbe transcendante particulière. Toutes les courbes qui dérivent ainsi d'une courbe algébrique sont algébriques et, réciproquement, une courbe algébrique ne peut être déduite que de courbes algébriques par des constructions élémentaires ; de même, en opérant sur une courbe panalgébrique particulière, on déduira de celle-ci de nouvelles courbes qui seront nécessairement panalgébriques. L'ensemble des courbes panalgébriques se décompose ainsi en groupes de courbes se rattachant entre elles au moyen de constructions élémentaires.

J'ai déjà signalé un exemple de ce fait dans un article intitulé : *Application d'une transformation de M. BROCARD à la construction de certaines courbes transcendantes*. Il s'agit de la transformation qui a permis de déduire du cercle le trifolium oblique. Prenant pour courbe transcendante primitive la spirale d'Archimède, en raison de sa grande simplicité et de son importance historique, on constitue une famille de courbes se rattachant à elle au moyen de constructions élémentaires : la spirale hyperbolique, la développante de cercle, la tractrice compliquée de COTES, le lituus de COTES, les spirales de GALILÉE et autres spirales de FERMAT, en sont les exemples les plus remarquables. Une autre famille de courbes transcendantes, liées entre elles par des transformations bien simples, est celle qui comprend la *quadratrice de DINOSTRATE*, les courbes plus générales que celle-ci rencontrées par CHASLES, à propos de l'hélicoïde gauche, la cochléoïde de FALKENBURG, la *syncochléoïde* et les courbes connexes. J'ai montré que la transformation de M. BROCARD, qui n'avait pas jusqu'ici été utilisée dans le domaine des courbes transcendantes, permet de déduire les cochléoïdes de la spirale hyperbolique : les deux familles précédentes, importantes du point de vue historique principalement, forment ainsi une famille unique de courbes quadratrices.

Mais ce qui est encore plus remarquable, c'est que la *cycloïde* elle aussi se rattache à cette famille. Par la transformation de

M. BROCARD, en effet, il est possible de déduire les courbes transcendantes particulières d'équations polaires

$$r = \theta \cdot \sin \theta ,$$

$$r = \theta \cdot \cos \theta ,$$

dé la spirale d'Archimède. L'équation de la cycloïde, en coordonnées polaires tangentielles de HESSE, est d'autre part

$$\varpi = \varphi \sin \varphi ,$$

$$\varpi = \varphi \cos \varphi ,$$

$$\varpi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \dots$$

suivant la position du point pris pour pôle. Cette cycloïde est donc l'antipodaire d'une des courbes précédentes, déduites de la spirale d'Archimède. *Il est donc possible de rattacher la construction tangente par tangente de la cycloïde à la spirale d'Archimède supposée donnée point par point.*

Dans l'article cité, on trouvera d'autres exemples d'applications de la transformation de BROCARD aux épis, à la spirale logarithmique... Je terminerai les considérations qui la concernent, en faisant observer que cette transformation peut être remplacée par la transformation définie par les formules

$$\theta_2 = \theta_1 , \quad r_2 = r_1 \sin \theta_1 ;$$

celle-ci se rattache à l'*inversion généralisée*, à laquelle sont consacrés les paragraphes 187 et 188 d'un récent ouvrage<sup>1</sup>; il suffit d'appliquer la transformation par inversion généralisée à la spirale d'Archimède et à un cercle passant par le pôle ou à une droite quelconque, pour obtenir la *quadratrice de Dinostrate* ou la courbe podaire de la cycloïde par rapport à un sommet. La construction des tangentes s'effectue immédiatement si l'on suppose connues celles de la spirale d'Archimède.

De même que les courbes panalgébriques, les courbes d'ordre  $\omega = 2$  se divisent en groupes: l'une des courbes d'ordre  $\omega = 2$  étant réalisée matériellement, on pourra en faire dériver de nouvelles courbes. Il sera aussi intéressant de supposer données les courbes panalgébriques: en opérant sur une courbe d'ordre  $\omega = 2$  et sur un certain nombre de courbes panalgébriques, on construira des courbes d'ordre  $\omega \geq 2$ . En opérant de même sur une courbe d'ordre  $\omega = 3$  et sur des courbes données d'ordres  $\omega = 2, \omega = 1, \omega = 0$ , on construira de nouvelles courbes d'ordre  $\omega \geq 3$ . Et ainsi

<sup>1</sup> H. BOUASSE et E. TURRIÈRE, Exercices et compléments de mathématiques générales, 1912 (pp. 149-150).



de suite. En opérant enfin sur une courbe hypertranscendante donnée et sur des courbes transcendentes d'ordres  $\omega$  finis, on formera de nouvelles courbes hypertranscendantes. Ainsi que je l'ai précédemment signalé, la courbe hypergéométrique d'Euler est un exemple de courbe hypertranscendante, d'après un théorème de M. O. HÖLDER sur la fonction eulérienne de seconde espèce. On pourra, par conséquent, rattacher à cette courbe hypergéométrique de nouvelles courbes hypertranscendantes.

Un cas particulièrement intéressant est celui qui concerne la construction de la développée d'une courbe transcendente. La construction tangentielle de la développée est immédiate ; mais pour construire la développée point par point il faudra connaître non seulement la courbe primitive, mais encore une courbe d'ordre égal ou moindre : *la radiale*, selon la dénomination de Tücker. Une courbe transcendente et sa radiale étant toutes deux connues point par point, on pourra construire la développée de la première point par point : j'ai déjà signalé l'exemple de la clothoïde et de sa développée, qui sont toutes deux d'ordre  $\omega = 3$  ; la radiale de la clothoïde est une courbe panalgébrique : le lituus de Cotes.

Au lieu de se donner *point par point* la radiale de la courbe transcendente, on pourrait se donner *tangente par tangente* la courbe que dans de récents travaux « *Ueber beständig elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmte Kurven* » (MATHEMATISCHE ANNALEN, 1912, p. 285 et pp. 593-595), M. H. MOHRMANN a associée à toute courbe plane sous le nom de « *Minkowskische Krümmungsbild* ». Mais la construction au moyen de la radiale est plus pratique, parce que les images de MINKOWSKI sont généralement bien moins simples que les radiales de TÜCKER.

Parmi les constructions géométriques opérant sur plusieurs courbes transcendentes, je signalerai d'une manière toute particulière la construction des *courbes transcendentes à coordonnées séparées*. Je dirai qu'une courbe est représentée par une équation à coordonnées séparées, lorsque cette équation sera donnée sous la forme :

$$f(x) = g(y) ,$$

ou lorsqu'elle sera susceptible d'être mise sous cette forme, les deux fonctions  $f(x)$ ,  $g(y)$  des deux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  étant *particulièrement simples*. C'est ce qui arrive dans le cas d'un très grand nombre de courbes transcendentes particulières, ainsi que des exemples ultérieurs le mettront en évidence.

Aux paragraphes 211-215 des *Exercices et compléments de mathématiques générales*, M. H. BOUASSE et moi avons étudié une transformation géométrique opérant sur trois courbes qui nous a été utile pour effectuer la construction, au moyen de deux

paraboles et d'un cercle, des quartiques d'équation

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = a^2 = \text{const} ;$$

qui, dans certaines conditions, admettent le nombre maximum de tangentes doubles réelles que fixent pour les quartiques les formules de PLÜCKER. — Cette transformation se définit ainsi : *Etant données trois courbes  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ , on considère un rectangle variable et mobile, dont les côtés gardent des directions invariables et dont trois sommets décrivent respectivement les trois courbes  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  imposées. Le lieu  $(C)$  du quatrième sommet est la courbe transformée des trois premières qu'il s'agit d'étudier.*

On observera que lorsque  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  sont trois lignes droites, il en est de même de la courbe transformée  $(C)$ . Si donc les trois premières courbes sont données ponctuellement et tangentielle-ment à la fois, la courbe  $(C)$  pourra être construite point par point et tangente par tangente : la tangente à  $(C)$  est, en effet, la transformée des tangentes à  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et  $(C_3)$ . Nous avons d'ailleurs fait connaître la relation qui lie leurs coefficients angulaires. — Un cas de cette transformation mérite un examen particulier : c'est celui pour lequel l'une des courbes est la bissectrice  $x = y$  des axes coordonnés (supposés rectangulaires). La relation entre les coefficients angulaires se simplifie encore, de même que celle qui lie les courbures : les constructions des tangentes et des cercles osculateurs deviennent beaucoup plus simples.

Considérons les deux courbes directrices  $(C_2)$  et  $(C_3)$  et supposons-les représentées par les deux équations :

$$(C_2) \quad y = f(x) ,$$

$$(C_3) \quad x = g(y) ;$$

le déplacement et la variation du rectangle ABCD sont ainsi définis : ses côtés restent parallèles aux axes coordonnés ; le sommet A décrit la droite d'équation  $x = y$  ; les deux sommets B et D voisins de A décrivent respectivement les courbes  $(C_3)$  et  $(C_2)$  ; le sommet C situé sur la même diagonale que A décrit la courbe  $(C)$  ; l'équation de celle-ci est

$$f(x) = g(y) .$$

Ce mode de génération des courbes  $(C)$  à coordonnées séparées s'applique à un grand nombre de courbes connues. C'est ainsi qu'en partant de deux chaînettes panalgébriques d'équations

$$(c_1) \quad y = \text{ch } 2x + c^2 ,$$

$$(c_2) \quad x = \text{ch } 2y - c^2 ,$$

égales entre elles et par conséquent nécessitant un gabarit unique, on construit la courbe ( $\omega = 2$ ) d'équation

$$\operatorname{ch} 2y - \operatorname{ch} 2x = 2c^2 ,$$

analogue à une courbe rencontrée par M. Gomes TEIXEIRA dans des recherches sur la théorie du développement des fonctions analytiques en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable; quant à la courbe de M. Teixeira, courbe dont l'équation est:

$$\operatorname{ch} 2y - \cos 2x = 2c^2$$

il faudra deux gabarits, pour la construire effectivement: l'un d'eux représentera une sinusoïde et l'autre une chaînette ordinaire. Lorsque le paramètre  $c$  varie, les trajectoires orthogonales des courbes précédentes et de celles de M. TEIXEIRA sont de nouvelles courbes à coordonnées séparées:

$$\operatorname{tang} x = k \operatorname{tang} y : \quad \operatorname{tang} x = k \operatorname{th} y :$$

les courbes ( $C_2$ ) et ( $C_3$ ) sont, dans le premier cas, deux tangentoïdes dont l'une est homothétique de l'autre et qui, par conséquent, peuvent être construites à l'aide d'un seul gabarit. Dans le second cas, au contraire, il faudra utiliser deux courbes transcendantes: pour construire, en effet, les trajectoires orthogonales des courbes de M. Teixeira, il sera nécessaire de posséder deux gabarits représentant l'un une tangentoïde ordinaire, et l'autre une tangentoïde hyperbolique. Je citerai encore la courbe d'Euler représentée par l'équation

$$x^y = y^x ;$$

elle n'est pas sous la forme à variables séparées; mais il est possible de la réduire aisément à une telle forme:

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y} ;$$

il suffira encore d'un seul gabarit pour construire les deux courbes ( $C_2$ ) et ( $C_3$ ) correspondantes:

$$y = \frac{\log x}{x} , \quad x = \frac{\log y}{y} .$$

En prenant pour ( $C_2$ ) ( $C_3$ ) deux courbes algébriques, on obtient ainsi pour courbe ( $C$ ) une courbe qui est nécessairement algébrique. En prenant une courbe algébrique et une courbe transcendante d'ordre  $\omega_0$ , on est conduit à une courbe de même ordre

$\omega_0$  : c'est le cas de la courbe d'équation (GINO LORIA, *Spezielle ebene Kurven*, II, p. 240)

$$y^2 - 2y \cos x = a ;$$

qui est construite avec une hyperbole et une sinusoïde : elle est panalgébrique. Plus généralement, en opérant sur deux courbes d'ordres  $\omega_2$  et  $\omega_3$  ( $\omega_3 > \omega_2$ ) la courbe transformée sera d'ordre  $\omega_2 + \omega_3$ , ou d'un ordre moindre mais supérieur à  $\omega_3$ .

Mais si les deux ordres sont égaux, la courbe résultante pourra n'être pas d'ordre  $\omega_2 = \omega_3$ . Il pourra y avoir un abaissement d'ordre. Prenons par exemple les deux courbes d'équations

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} , \quad y = - \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

R désignant un polynôme du quatrième degré : ce sont deux courbes panalgébriques ; la courbe résultante est algébrique. On pourrait encore citer les courbes :

$$x = m \cdot \log y , \quad y = n \cdot \log x ,$$

$m$  et  $n$  étant deux nombres algébriques dont le rapport est rationnel. Au cas simple où  $m = n = 1$ , on a les deux logarithmiques directrices considérées dans la même transformation, déjà proposée par M. BROCARD dans la question 2798 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904, p. 162.

Je terminerai en donnant quelques exemples de courbes transcendantes qui peuvent ainsi être construites comme courbes à coordonnées séparées : les courbes d'équation

$$\sin x \cdot \sin y = \text{const.} ,$$

et leurs trajectoires orthogonales

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \text{const.} ,$$

qui se présentent dans l'étude de la surface minima de SCHERK ; le dilogarithme d'Euler ; le double-sinus (les deux courbes  $(C_2)$  et  $(C_3)$  sont alors identiques) ; les lignes de MERCATOR-SUMNER et la chaînette de CORIOLIS, en particulier...

Émile TURRIÈRE (Montpellier).