

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: 2. — Discussion générale.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Serbie. — M. PETROVITCH : On n'a pas introduit jusqu'à présent les éléments du Calcul infinitésimal dans les écoles moyennes en Serbie. On y a pensé depuis quelque temps, mais les événements dont notre pays a été le théâtre ont empêché de mettre le projet en exécution. Une sous-commission nationale est maintenant formée en Serbie, elle fonctionne et a élaboré un plan d'enseignement mathématique dont la réalisation s'effectuera, selon toute vraisemblance, dans un bref délai. Pour réaliser le nouveau programme, on compte sur les simplifications et réductions à faire dans les parties plus élémentaires.

Le délégué serbe compte pouvoir présenter au prochain Congrès comme chose finie, la réforme de l'enseignement mathématique en Serbie dans le sens des idées modernes, adaptées aux circonstances dont nous aurons à tenir compte.

2. — Discussion générale.

Pour donner une image fidèle des intéressants débats auxquels donnèrent lieu les rapports très documentés de MM. BEKE et STAECKEL, il faudrait pouvoir reproduire non seulement dans tous leurs détails les observations générales, mais aussi les remarques spontanées, souvent fort suggestives, présentées par quelques-uns des orateurs. Cela n'est guère possible; aussi devons-nous nous borner à signaler les points essentiels sur lesquels a porté la discussion. Celle-ci était basée sur les résumés, rédigés par les rapporteurs eux-mêmes et rappelant les principales parties de leur exposé.

RÉSUMÉ DU RAPPORT GÉNÉRAL DE M. E. BEKE *sur les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire.*

1. — **Place du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.** — Dans tous les pays où, pendant les douze dernières années, un nouveau plan d'études des écoles secondaires est entré en vigueur, une place plus ou moins grande y a été réservée à la Notion de fonction et aussi — à très peu d'exceptions près — aux premiers éléments du Calcul différentiel et intégral.

A. — Les Eléments du Calcul infinitésimal figurent au programme officiel des écoles, ou au plan d'études établi par les écoles elles-mêmes, dans les pays suivants :

Etats allemands : Bavière, Wurtemberg, Bade, Hambourg.

Autres Etats : Autriche, Danemark, France, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Suède et Suisse.

B. — Les Eléments du Calcul infinitésimal ne figurent pas dans le plan d'études, mais ils sont enseignés dans un grand nombre d'écoles : Prusse, Saxe, Hongrie, Australie, et ils le seront probablement avant peu en Hollande, Norvège, Belgique et Serbie.

2. — **Etendue donnée au Calcul différentiel et intégral.** — *a)* Il n'est appliqué presque partout qu'aux fonctions d'une variable.

b) On enseigne partout la différentiation des polynômes, des fonctions rationnelles (ou au moins des quotients de deux polynômes linéaires), ainsi que, dans la plupart des pays, celle des fonctions exponentielles, trigonométriques et de leurs inverses.

c) Dans la plupart des pays on préfère la notation de Lagrange à celle de Leibniz.

d) Dans la plupart des pays on introduit aussi la notion d'intégrale ou de fonction primitive. Partout la notion d'intégrale suit celle de dérivée (en Bohême on les enseigne simultanément). Dans quelques pays, l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie; mais dans la plupart des Etats la marche inverse est suivie.

3. — **Applications du Calcul infinitésimal.** — *a)* La série de Taylor figure dans peu de programmes. Elle est néanmoins enseignée dans les écoles où les plans d'études embrassent depuis longtemps les séries infinies. Là on établit les séries de e^x , a^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, $\arctg x$. Je crois que l'exposition de la série de Taylor n'est pas encore suffisamment préparée pour l'école secondaire.

b) Le Calcul infinitésimal est appliqué partout à la recherche des maxima et minima.

c) Il est aussi appliqué en Physique, au moins pour définir la vitesse et l'accélération, mais quelquefois il trouve une application plus étendue (centre de gravité, moments d'inertie, potentiel, etc.) En Russie, on ne se sert généralement en Physique que des Mathématiques élémentaires.

d) Le Calcul infinitésimal est appliqué en Géométrie à la détermination des aires et des volumes, et c'est ici que la nouvelle méthode rend le plus de services au point de vue de l'économie. Mais on continue à appliquer les méthodes anciennes, surtout le principe de Cavalieri.

4. — **La question de rigueur.** — C'est un des points les plus délicats. Du côté de l'enseignement supérieur on entend dire que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Les professeurs des écoles secondaires doivent connaître le calcul infinitésimal moderne et rigoureux, mais dans leur enseignement ils doivent appliquer une méthode intuitive, des considérations

géométriques et mécaniques, et s'élever graduellement aux abstractions nécessaires. C'est aussi la manière la plus sûre d'éveiller dans l'esprit des élèves le désir de la rigueur.

a) Les nombres irrationnels sont introduits presque partout incidemment à l'occasion de l'extraction des racines. La théorie générale n'est exposée qu'exceptionnellement.

b) La notion de limite est introduite partout, nulle part on ne se contente de l'intuition. Les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés presque partout sans explications.

c) On ne fait pas d'allusions à des fonctions continues n'admettant nulle part de dérivée. Dans certaines écoles on se borne à dire qu'en certains points la dérivée peut cesser d'exister.

d) Dans la plupart des écoles la différentielle n'est pas introduite, il règne une confusion dans l'explication de la notion de différentielle. Il est à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire.

5. — **Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.** — Les matières nouvelles ne doivent pas être placées comme un supplément à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles.

L'élargissement du rôle de la notion de fonction et l'introduction du Calcul infinitésimal ne peuvent avoir de succès que si le programme ancien est réduit et s'il devient plus économique. Il résulte un allègement grâce à la fusion des matières nouvelles avec les anciennes et à la suppression de quelques matières surannées.

6. — **Le mouvement réformiste et l'opinion publique des pédagogues.** — Le caractère définitif des résultats de notre mouvement peut être assuré : 1) Par le succès ; 2) Par l'opinion publique toujours éveillée, des représentants de l'enseignement. Le mouvement a rencontré partout la sympathie des professeurs de l'enseignement secondaire, mais les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur, qui le regardent de leur point de vue spécial, ne sympathisent pas toujours avec nos tendances.

Nous entendons la plainte qu'un cours de Calcul différentiel et intégral n'est pas suivi avec intérêt par celui qui en a déjà quelques connaissances. Il n'est pas difficile de réfuter cette assertion. Qu'il nous suffise de rappeler les avis favorables que nous avons rencontrés parmi les professeurs des Universités de tous les pays, qui regardent notre mouvement d'un point de vue plus élevé.

*
* * *

Une première partie de la discussion sur les notions de dérivées et de fonctions primitives dans l'enseignement secondaire a eu lieu immédiatement après la lecture du rapport général de M. BEKE et du rapport spécial

de M. BIOCHE. Ont pris la parole : MM. BUHL (Toulouse), PADOA (Gênes), HADAMARD (Paris), CASTELNUOVO (Rome), POSSÉ (St-Pétersbourg), THAER (Hambourg), A. LÉVY (Paris), Th. ROUSSEAU (Dijon).

Il ressort de cette première discussion que l'introduction, dans l'enseignement moyen, des notions de dérivées et de fonctions primitives, a été généralement bien accueillie dans les principaux pays.

Comme l'a fait remarquer M. HADAMARD, membre de l'Institut, il faut que dans le premier enseignement des dérivées on évite d'établir un fossé entre l'intuition et la rigueur.

M. PADOA exprime la crainte que, pour donner satisfaction à des prétendues exigences didactiques, on ne retourne à la pseudo-intuition infinitésimale.

M. CASTELNUOVO, professeur à l'Université de Rome, désire avoir l'avis de ses collègues sur l'étendue à donner au calcul différentiel et intégral dans le programme des écoles moyennes. Il pense que dans cette première initiation on doit se borner à fixer clairement les notions indispensables pour suivre un cours d'une science quelconque, naturelle ou sociale, où l'on introduit le langage précis suggéré par les mathématiques.

A la question soulevée par M. Castelnuovo, M. Possé, professeur émérite de l'Université de St-Pétersbourg, répond qu'il estime que le minimum de connaissances mathématiques que doit fournir l'enseignement secondaire supérieur se trouve très bien représenté dans l'excellent manuel publié par Jules et Paul TANNERY, sous le titre *Notions de Mathématiques*¹, programme du 31 mai 1902, Librairie Delagrave, Paris.

M. THAER, Directeur d'Ecole réale supérieure (Hambourg), tient à constater qu'en Allemagne l'introduction des dérivées n'a pas apporté de surcharge dans les programmes ; ces notions sont plus accessibles que celles qui ont été supprimées dans les classes supérieures. Quant à l'étendue du programme, M. Thaer estime que l'on doit s'arrêter à l'aire de l'ellipse ; il résume ses remarques comme suit :

« Ich bin nicht vorbereitet auf die Frage zu antworten, ob bei einem Umfang des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung, wie er nach dem Bericht des Herrn Beke in Deutschland erteilt wird, eine Ueberbürdung der Schüler eintritt. Nach meinen persönlichen Erfahrungen möchte ich sie verneinen. Die Infinitesimalrechnung ist eher leichter als schwerer, wenn man sie mit dem vergleicht, was früher in den obersten Klassen getrieben wurde. Kein Schüler, der bis dahin in Mathematik normal folgen konnte, versagte in der Differenzialrechnung, ja mancher, der für Trigonometrie und Stereometrie wenig Interesse zeigte, gewann es an der Infinitesimalrechnung. Auch die Philologen stehen in Hamburg wohlwollend dieser Erweiterung des mathematischen Pensums gegenüber, waren es doch zwei klassische Philologen Direktor Friedländer und Schulrat Hoche die vor 40 Jahren in Hamburg die Differenzialrechnung einführten. Die Ergebnisse, wenn man als Grenze des Pensums die Berechnung der Fläche der Ellipse bezeichnet, sind gut, soweit man dies nach der Zenzuren der Schüler beurteilen kann. Jedenfalls wird dies Prädikat, wie statistisch festgestellt ist, vier mal so oft in Mathematik erteilt wie in den Sprachen. »

M. THAER désirerait être renseigné sur le moment où l'on introduit généralement les dérivées. Le rapport de M. BIOCHE signale les modifications ap-

¹ Trad. allemande par P. KLAESS; B. G. Teubner, Leipzig.

portées en France au programme de 1902 : il serait intéressant de connaître les raisons qui ont amené cette revision des programmes.

« Gestatten Sie, dass ich Ihre Aufmerksamkeit auf eine Frage richte, die Herr BEKE in seinem mündlichen Bericht nur leicht gestreift hat, weil sie nicht im Fragebogen stand. Das ist die Frage : Wann im Schulleben können wir, wann müssen wir mit der Einführung der Ableitung beginnen ? Herr BIOCHE hat die Frage für Frankreich in einem Bericht beantwortet. Darin fand ich zu meinem Erstaunen, dass man die Behandlung der Ableitungen in der zweiten Klasse gestrichen. In Hamburg unterrichtet man allerdings seit 40 Jahren Differenzialrechnung, aber wir sind trotzdem noch nicht zu einer definitiven Methode gekommen. Die Ursache liegt vielleicht darin, dass wir im XIX. Jahrhundert die Infinitesimalrechnung an den Schluss eines durchaus im alten Stil gehaltenen Unterricht setzen. Erst durch den Einfluss von Herrn KLEIN haben wir seit 10 Jahren mit der Betrachtung der Funktionen in den Mittelklassen begonnen, und daraufhin in den letzten Jahren, angeregt gerade durch die Beobachtungen, die Herr GRIMSEHL in französischen Schulen gemacht hat, einen ganz elementaren Kursus, der sich im wesentlichen auf ganze Funktionen beschränkt, in der Differential- und Integralrechnung in der Oberrealschule bei Schülern von 15—16 Jahren eingeführt. Wir haben dadurch den Vorteil, dass wir im zweiten Kursus der Physik, der in derselben Klasse beginnt, sofort Differentiale und Integrale benutzen können. Auch der zweite Kursus der Stereometrie speziell die Volumberechnung wird dadurch auf ein höheres Niveau gehoben und in der analytischen Geometrie erreichen wir ganz wesentliche Vereinfachungen besonders bei der Behandlung der Tangenten und Normalen. Es wäre deshalb interessant, wenn Herr BIOCHE die Gründe angeben wollte, warum man in Frankreich die Infinitesimalrechnung in der zweiten Klasse gestrichen hat und dadurch auf den Vorteil verzichtet, sie schon nützlich in der Physik zu verwenden. »

La seconde partie de la discussion a eu lieu samedi matin. Y ont pris part : MM. BEKE (Budapest), THAER (Hambourg), BIOCHE (Paris), FONTENÉ (Paris), HADAMARD (Paris), DARBOUX (Paris), PADOA (Gènes), ENRIQUES (Bologne) et RIVAL (Grenoble).

M. BIOCHE, professeur au Lycée Louis-le-Grand (Paris), répond à M. Thaer en le renvoyant au rapport spécial annexé au rapport de M. Beke, on y trouve précisément la gradation établie maintenant, depuis la modification apportée en 1912 au plan d'études antérieur.

En *Seconde*, étude de fonctions simples, sans dérivées ;

En *Première*, notions sur les dérivées et leur usage, en se limitant à certaines fonctions précisées au programme ;

En *mathématiques*, extension aux fonctions rationnelles, irrationnelles du 2^e degré, et trigonométriques.

Quelques personnes ont trouvé le programme trop restreint, et ont regretté que celui-ci ne mentionne pas la dérivée d'une fonction de fonction. Il ne faut pas oublier que les programmes de *Première* ou de *Mathématiques* sont des programmes de baccalauréat ; on a voulu éviter d'y mentionner certaines questions pour que celles-ci ne soient pas prises comme *questions de cours*. Mais les professeurs peuvent donner, et donnent effectivement, des théories ou des formules qui peuvent être utiles, bien que non explicitement mentionnées dans le programme ; on peut le constater en lisant les traités publiés à l'usage des élèves.

M. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, est de l'avis de M. Bioche. La séparation prévue dans le programme actuel est très utile ; l'élève doit d'abord étudier la fonction sans faire usage de la dérivée.

M. HADAMARD, membre de l'Institut, se déclare également d'accord avec les deux orateurs précédents. Dans l'enseignement il faut éviter l'automatisme ; il faut, le plus souvent possible, faire appel au bon sens. Le professeur doit s'assurer que l'élève sait étudier les fonctions élémentaires pour elles-mêmes, par la discussion directe et l'observation, avant de faire intervenir la dérivée. M. HADAMARD illustre ses observations par ses souvenirs d'examineur.

M. DARBOUX, membre de l'Institut, l'un des principaux collaborateurs aux programmes de 1902, fait remarquer que ces programmes prévoyaient déjà une gradation dans l'introduction des notions de fonction et de dérivée. Il faut aussi tenir compte qu'à côté du programme il y a également le rôle du professeur, qui doit savoir se limiter aux choses essentielles.

M. THAER dit qu'en Allemagne la première initiation se fait également dans les classes précédentes par la considération de fonctions simples et de représentation graphique. Le maître s'adresse alors à des élèves d'environ 14 ans. Les premières notions de calcul différentiel ne sont présentées que plus tard, lorsque les élèves ont 15-16 ans ; ce qui correspond donc, au point de vue de l'âge, à ce qui se fait en France. Pendant les trois années suivantes, les connaissances acquises sont utilisées, notamment en physique.

D'après M. PADOA, professeur à l'Institut technique de Gênes, le concept d'intégrale définie est plus accessible que celui de dérivée, car le premier réclame la seule notion de limite supérieure et inférieure, que les élèves possèdent déjà (nombres réels, longueur d'une circonférence, etc.), tandis que le second repose sur la notion plus subtile du passage à la limite. D'ailleurs, le théorème « sur le maximum d'un produit de n nombres absolus, ayant une somme donnée » permet de résoudre toutes les questions de maximum et de minimum qui se présentent dans les Mathématiques élémentaires ; tandis que, pour atteindre ce but par la méthode des dérivées, il ne suffit pas d'étudier les fonctions d'une seule variable.

M. FONTENÉ insiste à son tour sur la nécessité d'avoir un programme bien gradué ; il faut éviter chez les élèves un emploi machinal des connaissances mathématiques ; il craint qu'avec l'abus des dérivées, utilisées seules et sans réflexion, on ne diminue les occasions d'obtenir un effort personnel.

Quant à l'étude de la série de Taylor, comme l'a dit M. Beke, les élèves ne sont pas encore suffisamment préparés.

M. HADAMARD estime même que l'étude directe de la *série* de Taylor est d'un intérêt minime, non seulement dans l'enseignement élémentaire, mais d'une manière générale, car elle est fondée sur une idée peu scientifique, celle qu'une fonction arbitraire admet en général un développement de cette espèce.

Les récents programmes de la classe de *Mathématiques spéciales* ont modifié les vues relatives à l'application de la série de Taylor. Les seuls développements qui s'obtiennent par l'emploi du théorème général sont ceux de $\sin x$, $\cos x$. Tous les autres $[a^x, \log(1+x), (1+x)^m, \operatorname{arctg} x]$ sont déduits des propriétés analytiques des fonctions envisagées. A cet effet, les propriétés générales les plus simples des séries entières — en particulier en ce qui concerne la dérivation et l'intégration — sont démontrées.

M. ENRIQUES, professeur à l'Université de Bologne, trouve exagéré le

point de vue de M. Hadamard, d'autant plus qu'on doit à M. Hadamard des mémoires très remarquables qui se rattachent à la série de Taylor.

M. DARBOUX est d'accord dans une certaine mesure avec M. Hadamard. Pour les fonctions élémentaires, il n'est pas nécessaire d'employer la série de Taylor, mais il faut tout de même reconnaître que la formule est utile.

M. CZUBER, qui présidait la dernière séance, remercie au nom du Comité Central tous ceux qui ont participé à la discussion et proclame la clôture des séances de travail.

Annexe : Extraits de quelques rapports nationaux.

Voici les Etats dont les délégués ont envoyé des réponses au questionnaire A concernant l'introduction des premiers éléments du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire supérieur.

	Rapporteurs :		Rapporteurs :
Allemagne	MM. LIETZMANN et THER	Hongrie	MM. BEKE et MIKOLA
Australie	CARSLAW	Iles Britanniques	GODFREY
Autriche	SUPPANTSCHITSCH	Italie	CASTELNUOVO
	BYDZOVSKI	Norvège	ALFSEN
Brésil	E. GABAGLIA	Russie	POSSÉ
Danemark	HEEGAARD	Serbie	PETROVITCH
Etats-Unis	D. E. SMITH	Suisse	BRANDENBERGER et
France	Ch. BIOCHE		FEHR
Hollande	CARDINAAL		

Le rapporteur général a dépouillé et étudié avec beaucoup de soins les réponses rédigées par les délégués et qui, pour la plupart des pays, formaient de véritables rapports. Il en a mentionné les résultats essentiels dans son excellent exposé ; nous n'avons donc pas à y revenir.

Trois des rapporteurs nationaux, MM. GODFREY, LIETZMANN et SUPPANTSCHITSCH, ont publié le résultat de leur enquête à la veille de la Conférence de Paris. Nous en extrayons les passages concernant plus particulièrement l'accueil fait à l'introduction des premiers éléments du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.

Allemagne. — Le rapport publié dans la *Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht aller Schulgattungen* (45. Jahrg., 1914, 3. Heft, p. 145-160), sous le titre « Die Einführung der Elemente der Differential- u. Integralrechnung in die höheren Schulen. Bericht über die Verhältnisse in Deutschland, der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission erstattet von W. LIETZMANN mit zahlreichen Bemerkungen von Fachleuten », se termine par la remarque suivante de M. F. KLEIN :

Nicht auf die Vertreter der Mathematik an den Universitäten kommt es eigentlich an, sondern auf die Mathematiker an den technischen Hochschulen und die Universitätsphysiker. Denn diese haben mit der mittleren mathematischen Durchbildung der Abiturienten in erster Linie zu rechnen. Wie sie zur Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung stehen ? Ich fürchte beinahe, dass eine grosse Zahl von dem augenblicklichen Stande der Dinge gar keine Kenntnis hat.

Wir befinden uns eben in einem Uebergangszustande. Im Zusammenhang damit stellt sich bei den Zuhörern, die mit einiger Kenntnis der Infini-