

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DEUX APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES  
**Autor:** Braude, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15537>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR DEUX APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES

---

1. — Dans un article « Sur quelques généralisations de la transformation de M. E. Koestlin », qui paraîtra prochainement dans les « *Annales de l'Académie de Porto* », nous avons traité l'*arcuïde*. Nous y avons généralisé cette courbe<sup>1</sup> en remplaçant l'axe rectiligne par une axe curviligne (voir la définition au n° 2). De même nous avons mentionné plusieurs générations et les propriétés principales des courbes, dont l'équation intrinsèque est

$$(1) \quad R = ae^{m\varphi} \cos n\varphi \quad \text{ou} \quad (1') \quad R = a\varphi e^{m\varphi} .$$

Ces courbes, que nous avons nommées *logarithmoïdales*, ont été signalées comme semblables à leurs développées successives par M. G. LORIA<sup>2</sup>, nous les avons traitées comme *causticoïdes* de la *spirale logarithmique*<sup>3</sup>. La *logarithmoïde* ( $n = 1$ ) a fait l'objet de plusieurs articles de M. KOESTLIN; (voir Mitt. math. nat. Verein Württemberg, (2), 9, 1907, p. 21-30; (2), 11, 1909, p. 54); elle a aussi été mentionnée par d'autres auteurs<sup>4</sup>.

Dans ce qui suit, nous allons déduire une relation intéressante entre les trois courbes associées à une courbe (C) à l'aide des coordonnées intrinsèques.

2. — Si l'équation intrinsèque de (C) a la forme

$$(2) \quad (C) \equiv f(s, R) = 0$$

on aura la *courbe de Mannheim*, représentée par l'équation ponctuelle

$$(3) \quad (M) \equiv f(x, \gamma) = 0$$

<sup>1</sup> Voir la thèse de M. KOESTLIN : *Über eine Deutung der Gleichung, die zwischen dem Bogen einer Kurve und der Neigung der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht*, Tübingen, 1907. — H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven*. Leipzig, 1908, p. 373.

<sup>2</sup> Voir *Spezielle Ebene Kurven*, 2<sup>e</sup> éd., Leipzig, 1910-11, t. II, p. 260.

<sup>3</sup> Voir NILS GRANE, *Über Kurven mit gleichartigen successivén Developpoiden*, thèse, Lund, 1894; G. LORIA, II, p. 309.

<sup>4</sup> L. BRAUDE, *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoïde*, Archiv der Math. und Physik (3), XX, p. 44-52; E. TURRIÈRE, L'Enseign. Math. XV, 1913, p. 236; H. WIELEITNER, *Spez. Eb. Kurven*. p. 373.

comme lieu du premier centre de courbure quand on fait rouler<sup>1</sup> (C) sur l'axe des  $x$ .

En cherchant à l'aide de l'équation

$$(4) \quad ds = R d\varphi$$

le rayon de courbure comme fonction de sa déviation  $\varphi$ , on aura l'équation intrinsèque sous la forme

$$(5) \quad (C) \equiv f_1(R, \varphi) = 0 .$$

Alors la *radiale*<sup>2</sup> de (C) est le lieu des extrémités des rayons vecteurs équipollents aux rayons de courbure de (C); son équation polaire est

$$(6) \quad f_1(r, \omega) = 0 .$$

Enfin, en représentant la courbe (C) par l'équation

$$(7) \quad s = f_2(\varphi)$$

l'*arcuïde* de (C) aura l'équation tangentielle :

$$(8) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - f_2(\varphi) \cos \varphi = 0 .$$

Elle sera l'enveloppe des droites parallèles aux normales de (C) qui coupent l'axe des  $x$  aux points dont les abscisses sont égales aux arcs correspondants de (C).

En dérivant (8) ou l'équation équivalente

$$(8') \quad x + y \operatorname{tg} \varphi - s = 0$$

on aura les coordonnées cartésiennes du point de contact  $P(x, y)$ , savoir

$$(9) \quad x = s - R \sin \varphi \cos \varphi, \quad y = R \cos^2 \varphi .$$

De là, on déduit

$$(x - s)^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \varphi .$$

le point  $P(x, y)$  est donc la projection du point  $E(x = s, y = R)$ , c'est-à-dire du point correspondant de la *courbe de Mannheim* M sur la tangente (8).

**3.** — D'après un théorème publié par M. SANTANGELO et quelque temps après par l'auteur<sup>3</sup>, on peut faire rouler la radiale (R) de

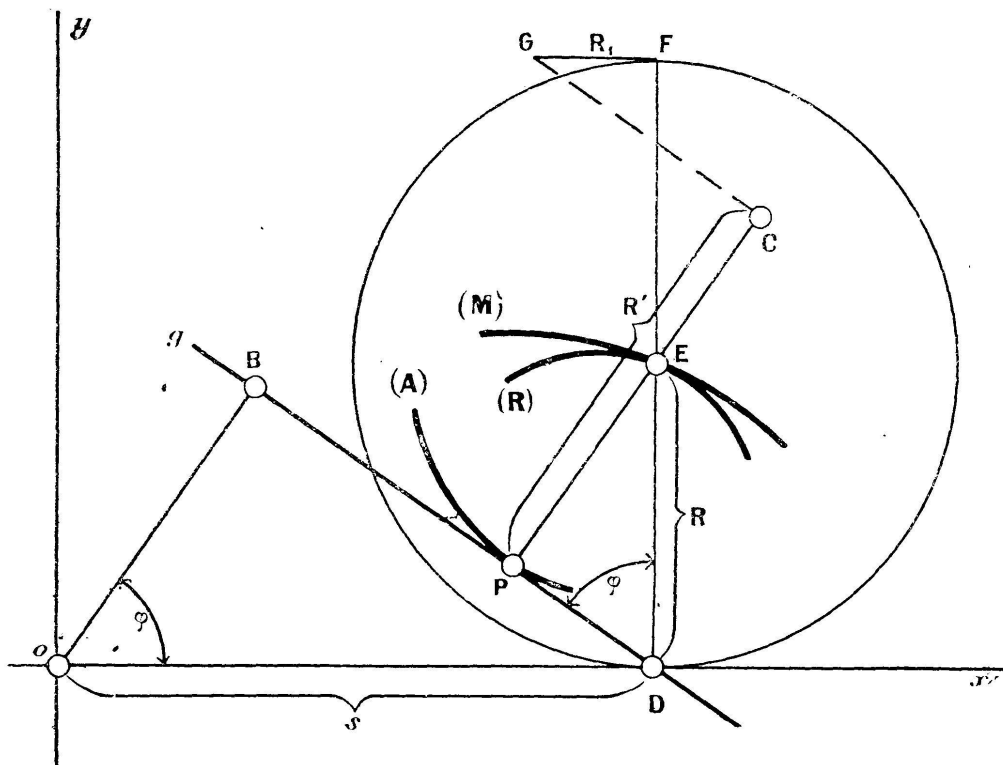
<sup>1</sup> Voir A. MANNHEIM, *Géom. ciném.*, p. 500; G. LORIA, II, p. 231; H. WIELEITNER, p. 227. Voir de même notre thèse *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve*, Heidelberg, 1911.

<sup>2</sup> Voir G. LORIA, II, p. 289; H. WIELEITNER, p. 362.

<sup>3</sup> Voir G. B. SANTANGELO, *Sulle curve di Mannheim, sulle radiale e und generalizzazione di esse*, Rend. Circ. Mat. Pal., 29, 1910, ou notre thèse, ou enfin notre article *Ueber Roll- und Fusspunktkurven*, Rend. Circ. Mat. Pal., 34, 1912.

la courbe (C) sur la courbe de Mannheim (M) de sorte que la roulette du pôle est l'axe des  $x$ , théorème qui est identique aux théorèmes bien connus de Steiner et de Habich sur les *roulettes à base rectiligne* et sur les *podaires* (Wieleitner, p. 207, 208). En ce cas la tangente  $g$  de (A) et l'ordonnée de (M) ou le rayon de (R) forment toujours l'angle  $\varphi$ ;  $g$  est donc identique à une droite immobile menée par le pôle de (R). De là, il résulte :

*Quand on fait rouler la radiale (R) sur la courbe de Mannheim (M) on aura comme enveloppe d'une droite  $g$ , menée par le pôle de (R), une certaine arcuide de (C).*



Par variation de  $g$  on aura les  $\infty^1$  différentes arcuides de (C), liées entre elles par la transformation de Koestlin, c'est-à-dire par une rotation constante de chaque tangente autour de son tracé sur l'axe des  $x$ .

APPLICATIONS. — *a)* Soit (C) une circonférence de rayon  $a$ , alors la courbe de Mannheim est une droite  $g$  parallèle à l'axe des  $x$  à la distance  $d$ ; la radiale est une circonférence congruente pour laquelle le pôle est situé au centre. En la faisant rouler sur  $g$  on aura, d'après CHASLES (*G. Loria*, II, p. 142) comme enveloppes des diamètres un système de cycloïdes congruentes, représentant les arcuides de (C).

*b)* Supposons que (C) est une cycloïde

$$(10) \quad s^2 + R^2 = a^2$$

ou

$$(11) \quad R = a \cos (\varphi - \varphi_0) .$$

Alors la radiale est la circonférence

$$(12) \quad r = a \cos (\varphi - \varphi_0)$$

la courbe de *Mannheim* est une circonférence à double extension

$$(12') \quad x^2 + y^2 = a^2 .$$

En faisant rouler (12) de même courbure sur (12'), on aura comme roulette du pôle (qui est ici, d'après (12) un point P de sa périphérie) l'axe des  $x$  de (12'). L'enveloppe d'une droite ( $g$ ) menée par P est une *astroïde oblique*, parallèle à l'enveloppe du diamètre de (12) qui est parallèle à  $g$ .

c) L'arcuïde d'une astroïde droite, représentée par

$$(13) \quad 4s^2 + R^2 = a^2$$

ou

$$(13') \quad s = \frac{a}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) , \quad R = a \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

est une *hypocycloïde de Steiner*, dont l'extension est indépendante de la position de l'astroïde; son équation tangentielle est

$$(14) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - \frac{a}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi = 0$$

elle aura donc toujours l'axe des  $x$  comme tangente à l'origine<sup>1</sup>. La radiale de (13) est la *rosace à quatre feuilles*

$$(15) \quad r = a \sin 2a ,$$

la courbe de Mannheim est l'ellipse correspondante:

$$(15') \quad 4x^2 + y^2 = a^2 .$$

De là, il résulte :

Quand on fait rouler la rosace (15) sur l'ellipse (15') de sorte que la roulette du pôle soit l'axe des  $x$  on aura comme enveloppe d'une droite quelconque  $g$  menée par le pôle un système d'hypocycloïdes tricuspidales congruentes entre elles.

d) Enfin la spirale logarithmique

$$(16) \quad R = as$$

aura comme courbe de Mannheim la droite  $y = ax$ ; la radiale est une spirale congruente. On aura donc sans aucun calcul l'arcuïde,

<sup>1</sup> Voir LAGUERRE, *Œuvres*, II, p. 580; WIELEITNER, p. 384; quant à une généralisation de ce théorème et de quelques autres, mentionnés dans cet article, voir aussi notre petit opuscule: *Les coordonnées intrinsèques*, Gauthier-Villars, 1914.

c'est-à-dire la *logarithmoïde* comme enveloppe d'une droite menée par le pôle de la spirale qu'on fait rouler sur la droite.

4. — De même nous allons regarder les arcuïdes d'une famille de courbes à courbure proportionnelle. On aura une telle famille de courbes par la variation de la constante  $c$  dans l'équation intrinsèque

$$(17) \quad R = cf(s) .$$

Les courbes de Mannheim dont les équations ponctuelles sont

$$(17') \quad y = cf(x)$$

sont affines entre elles par rapport à l'axe des  $x$ . L'équation polaire des radiales est

$$(18) \quad \varphi = cf\left(\frac{1}{c} \int \frac{ds}{f(s)}\right) ;$$

on aura donc toutes ces courbes par une seule par la multiplication du rayon polaire et de l'angle polaire avec deux constantes réciproques entre elles. Enfin les arcuïdes de  $R = f(s)$  et de  $R = cf(s)$  ont les équations

$$(19) \quad (A) \quad x + y \operatorname{tg} \varphi - s = 0 .$$

$$(19') \quad (A') \quad x + y \operatorname{tg} n\varphi - s = 0 .$$

On aura donc (A') en divisant l'angle  $\varphi$  compris entre la tangente de (A) et l'axe des  $x$  dans un rapport constant.

APPLICATIONS. — a) Soit (C) une circonférence dont l'arcuïde est une cycloïde. Toutes les courbes à courbure proportionnelle sont des circonférences semblables ; de là il résulte :

*Quand on divise l'angle entre la tangente (normale) d'une cycloïde et la tangente aux sommets (directrice) dans un rapport constant, l'enveloppe de ces droites est une cycloïde semblable.*

b) Soit (C) une spirale logarithmique  $R = as$  alors toutes les courbes à courbure proportionnelle sont des autres spirales :  $R = a_1 s$  ; de là on déduit :

*Quand on divise l'angle de contingence d'une logarithmoïde par rapport à l'axe fondamental (tangente) dans un rapport constant on aura comme enveloppes des droites une autre logarithmoïde.*

c) Supposons enfin comme (C) une astroïde oblique

$$(20) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - \cos \varphi \cos (\varphi - \varphi_0) = .$$

Elle est l'arcuïde de la cycloïde  $s = \cos(\varphi - \varphi_0)$  ou  $R^2 + s^2 = 1$  ; l'axe des  $x$  est une tangente double de l'astroïde. En appliquant la transformation  $s = s'$ ,  $R = \frac{R'}{2}$ , la cycloïde aura comme courbe

à courbure proportionnelle une astroïde droite, dont l'arcuïde est une hypocycloïde de Steiner. On trouve donc :

*Quand on dédouble l'angle d'inclinaison de la tangente variable d'une astroïde oblique par rapport à une tangente double, l'enveloppe de ces droites est une hypocycloïde tricuspïdale.*

Si par exemple l'équation cartésienne de l'astroïde est

$$(21) \quad (x - a)^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0$$

celle de l'hypocycloïde tricuspïdale est

$$(21') \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - 2a \cos^3 \varphi = 0$$

il y a donc au point de rebroussement de (21), situé à l'origine, un rebroussement de la courbe (21'); le sommet opposé de (21') est situé dans l'autre rebroussement de (21), c'est-à-dire au point  $(x = 2a, y = 0)$ .

Pour la croix de Malte

$$(22) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - a \cos^2 \varphi = 0$$

dont l'axe des  $x$  est la tangente au point auto-tangentiel, la podaire de la transformée

$$(22') \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - a \cos \varphi \cos 2\varphi = 0$$

est un *trifolium droit*<sup>1</sup>.

L. BRAUDE (Bierstadt - Wiesbaden).

<sup>1</sup> Voir G. LORIA, I, p. 170; F. G. TEIXEIRA, *Traité de courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre, 1908, t. II, p. 188; H. WIELEITNER, p. 149.