

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE LEÇON D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE SUR LES POLYNOMES BIQUADRATIQUES ET DOUBLEMENT QUADRATIQUES  
**Autor:** Cailler, C.  
**Kapitel:** II. — Polynômes du second degré.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15539>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

but principal demeure l'équation doublement quadratique, la recherche de ses invariants, le problème de l'équivalence entre de semblables équations, etc. Or on peut se demander si le détour par les fonctions elliptiques offre un avantage bien réel, et si ces diverses questions ne se résoudreient pas aussi simplement par les seules ressources de l'Algèbre.

En prenant ce point de vue direct, opposé à celui d'Halphen, il semble en effet qu'on gagne plutôt; on obtient en tout cas un exposé aussi approfondi, et peut-être plus clair, des propriétés de l'équation dont il s'agit. Il est loisible ensuite de fermer le cercle par l'étude de l'intégrale elliptique attachée au polynôme doublement quadratique, c'est par là que je termine.

Tel est donc l'objectif que j'ai poursuivi; j'ai essayé de discuter par une marche élémentaire, bien qu'assez à fond, le problème algébrique, et de trouver, dans sa résolution, la clef des premières propriétés de l'intégrale elliptique. Cette marche qui m'était suggérée par le plan même de mon cours, tel que je l'avais d'abord tracé, se confond avec celle qu'ont dû suivre tout naturellement les premiers inventeurs du théorème d'addition, Euler en particulier. Il me semble, en la renouvelant, l'avoir sensiblement perfectionnée; au lieu de me contenter de vérifier des formules en quelque sorte toutes préparées, j'ai cherché à mettre partout en évidence les raisons cachées de ces formules. Ceci ne va pas sans quelques longueurs.

C'est notamment par ce souci de clarté qu'on s'expliquera la présence ici des deux premiers chapitres de mon travail: tout élémentaires qu'ils sont, ils font corps avec la suite et ne sauraient en être séparés, ce sont eux qui renferment le secret des propriétés assez complexes de l'équation doublement quadratique. On n'y verra peut-être pas sans intérêt le rôle prédominant que je fais jouer, notamment dans la théorie des équations du 4<sup>me</sup> degré, aux polynômes quadratiques dont les racines se divisent harmoniquement deux à deux. L'introduction méthodique de pareils polynômes *conjugués*, ou *orthogonaux*, me paraît jeter une vive lumière sur tout le sujet; aussi me suis-je attardé sur les propriétés de ces polynômes au delà de ce qui était strictement nécessaire.

## II. — Polynômes du second degré.

2. — Dans toute la suite nous rencontrerons constamment des combinaisons homogènes de divers polynômes  $f, g, h, \dots$ , les degrés de ces polynômes en  $x$  sont zéro, un, ou deux. Nous n'emploierons pas la notation homogène, et nous regarderons toujours ces polynômes comme de degré 2. Ils possèdent deux racines; seulement quand le degré effectif s'abaisse, une des racines, ou toutes

les deux, se trouve rejetée à l'infini. A ce point de vue, deux polynômes d'un degré égal à l'unité ne sont jamais premiers entre eux comme ayant en commun le facteur  $x - \infty$  ; une constante est un polynôme carré dont les deux racines sont à l'infini et dont la dérivée est identiquement nulle, etc.

Notons encore qu'une relation telle que  $h^2 = fg$  ne peut subsister que dans les deux suppositions que voici : ou bien  $f$  et  $g$  sont des carrés parfaits, ayant respectivement pour racines les facteurs linéaires de  $h$ , ou bien  $f, g, h$ , ne diffèrent les uns des autres que par un facteur constant. Ce théorème, évident, ne suppose pas non plus le degré effectif égal à 2. En voici une application immédiate.

On sait que si  $y^2 = ax^2 + 2bx + c$  est l'équation d'une conique rapportée à un axe de symétrie, les coordonnées  $x$  et  $y$  peuvent, d'une infinité de manières, s'écrire sous la forme

$$x = \frac{f}{g} \quad y = \frac{h}{g} . \quad (1)$$

Les trois polynômes  $f, g, h$ , en  $t$ , sont du second degré et donnent lieu à l'identité

$$h^2 = af^2 + 2bfg + cg^2 = FG , \quad (2)$$

où  $F$  et  $G$  désignent certaines combinaisons linéaires de  $f$  et  $g$ . Par exemple si  $a \neq 0$ , on peut prendre

$$F\sqrt{a} = af + (b + \sqrt{\Delta})g , \quad G\sqrt{a} = af + (b - \sqrt{\Delta})g ,$$

la lettre  $\Delta$  représente ici le discriminant  $b^2 - ac$  du polynôme  $ax^2 + 2bx + c$ .

En tout cas si la conique est non décomposable  $F, G, h$  sont distincts, car dans le cas contraire on aurait une relation linéaire entre  $x, y$ . On doit donc conclure de (2) que  $F$  et  $G$  sont des carrés,

$$F = \varphi^2 , \quad G = \gamma^2 , \quad h = \varphi\gamma , \quad (3)$$

et voici la conséquence. *Dans la représentation (1) le polynôme  $h$  ne diffère que par un facteur constant de cet autre  $fg' - f'g$ .*

En effet, si  $F = lf + mg$  et  $G = l'f + m'g$ , on a d'abord

$$FG' - F'G = (lm' - l'm)(fg' - f'g) :$$

puis d'après (3)

$$FG' - F'G = 2\varphi\gamma(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma) = 2h(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma) .$$

La proposition est prouvée, car les quantités  $lm' - l'm$  et  $\varphi\gamma' - \varphi'\gamma$  sont évidemment constantes.

Réciproquement, si  $f$ ,  $g$ ,  $h$  représentent trois polynômes quadratiques en  $t$ , la courbe  $x = \frac{f}{g}$ ,  $y = \frac{h}{g}$  est une conique, décomposable ou non. Si,  $f$  et  $g$  restant quelconques, on prend  $h$  égal ou proportionnel au polynôme du second degré  $h = fg' - f'g$ , notre conique admet l'axe des  $x$  comme axe de symétrie. Cela résulte de l'identité

$$(fg' - f'g)^2 = (g'^2 - 2gg'')f^2 + 2(f''g - f'g' + fg'')fg + (f'^2 - 2ff'')g^2,$$

que nous écrivons en abrégé

$$(fg' - f'g)^2 = (gg)f^2 - 2(fg)fg + (ff)g^2, \quad (4)$$

en posant, pour deux polynômes quelconques qui peuvent coïncider

$$(fg) = f'g' - f''g - fg''. \quad (5)$$

La quantité  $(fg)$  ainsi définie est une constante, comme on le voit en la différentiant; elle s'appelle *l'invariant simultané* des polynômes  $f$  et  $g$ ; lorsqu'ils deviennent égaux, l'invariant  $(ff)$  se trouve égal au quadruple du discriminant  $B^2 - AC$  de la forme  $f = Ax^2 + 2Bx + C$ .

D'après l'identité (4), on voit bien que les formules

$$x = \frac{f}{g}, \quad y = \frac{f'g - fg'}{g},$$

donnent la représentation paramétrique de la conique

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c, \quad (6)$$

aux coefficients  $a = (gg)$ ,  $b = -(fg)$ ,  $c = (ff)$ .

Considérons le polynôme  $h = fg' - f'g$ ; de cette définition on tire les formules

$$h = fg' - f'g, \quad h' = fg'' - f''g, \quad h'' = f'g'' - f''g', \quad (7)$$

d'où

$$hf'' - h'f' + h''f = 0, \quad hg'' - h'g' + h''g = 0, \quad (8)$$

c'est-à-dire  $(hf) = 0$  et  $(hg) = 0$ .

Si on nomme *conjugués* ou *orthogonaux* deux polynômes à invariant nul, on montre aisément que les racines de l'un d'entre eux divisent harmoniquement l'intervalle des racines de l'autre. Les équations ci-dessus  $(hf) = (hg) = 0$  signifient donc que dans la

représentation paramétrique de la conique (6), le polynôme  $h$  est orthogonal à  $f$  et  $g$ , comme aussi à tout polynôme  $lf + mg$  appartenant à leur faisceau. Et cette règle suffit à déterminer  $h$ , sauf un coefficient constant, en fonction de deux polynômes quelconques du dit faisceau.

Tirons quelques conséquences du système (7).

a) Si  $f$  et  $g$  admettent un facteur commun  $t - \alpha$ , les deux premières formules (7) montrent que  $h$  et  $h'$  admettraient ce même facteur  $t - \alpha$ ;  $h$  serait donc carré parfait. Il n'y a pas d'exception pour  $\alpha = \infty$ ;  $f$  et  $g$  seraient alors tous deux du premier degré et  $h$  une simple constante.

Inversement, si  $f$  et  $g$  sont premiers entre eux,  $h$  n'est jamais carré. Car d'abord il ne peut être constant, parce que, d'après la seconde formule (7),  $f$  et  $g$  seraient dans ce cas identiques, à un facteur près. En second lieu, si on pose  $h = \frac{h''}{2} (t - \alpha)^2$ , avec  $h'' \neq 0$ ,  $h$  et  $h'$  s'annulent pour  $t = \alpha$  et comme le déterminant  $f'g'' - f''g' = h''$  est non nul,  $f$  et  $g$  possèdent tous deux le diviseur  $t - \alpha$ ; ceci en vertu des mêmes formules (7).

En résumé; si  $f$  et  $g$  n'ont aucun facteur commun,  $h$  est non carré, s'ils en ont un seul,  $h$  est carré parfait, s'ils en ont deux,  $h$  est nul identiquement.

b) Supposons désormais  $f$  et  $g$  premiers entre eux, par suite  $h$  non carré, ou son discriminant  $\frac{1}{4} (hh)$  différent de zéro. Dans ce cas la conique (6) est non décomposable; en effet, son discriminant

$$(fg)^2 - (ff)(gg) = (f''g - f'g' + fg'')^2 - (f'^2 - 2ff'')(g'^2 - 2gg''),$$

peut aussi s'écrire

$$(fg'' - f''g)^2 - 2(fg' - f'g)(f'g'' - f''g') = h'^2 - 2hh'' = (hh),$$

ce qui rend la proposition évidente.

c) Les polynômes  $f, g, h$  sont linéairement indépendants. Soit en effet  $F = lf + mg$  un polynôme appartenant au faisceau  $f, g$ ; on ne saurait avoir  $h = F$ , car la condition d'orthogonalité  $(hF) = 0$  donnerait dans ce cas  $h'^2 - 2hh'' = 0$ , chose absurde  $h$  n'étant pas carré.

Je dis de plus que si  $h$  et  $F$  possèdent un facteur commun,  $F$  est un carré parfait. En effet, soit  $t - \alpha$  le facteur commun; la condition  $(hF) = h'F' - hF'' - h''F = 0$  montre que  $t - \alpha$  divisera  $h'F'$ , sans diviser  $h'$  puisque  $h$  est non carré. C'est donc que  $F$  et  $F'$  sont tous deux divisibles par  $t - \alpha$  et qu'ainsi  $F$  est carré; cette conséquence persiste, comme on voit facilement, même si  $\alpha = \infty$ . Ré-

ciproquement toutes les fois que  $F$  est un carré exact  $(t - \alpha)^2$ ,  $h$  admet le diviseur  $(t - \alpha)$ , la chose est évidente.

On voit, en somme, que  $h$  étant écrit sous la forme  $h = A(t - \alpha)(t - \beta)$ , le faisceau  $(f, g)$  qui contient certainement deux carrés, comme on a vu plus haut, n'en contient pas d'autre que ces deux-ci  $(t - \alpha)^2$  et  $(t - \beta)^2$ . Les racines  $\alpha$  et  $\beta$  du polynôme  $h$  définissent ce qu'on appelle les points doubles du faisceau, ou de l'involution  $(f, g)$ .

3. — *Condition de réalité.* — Supposons  $f$  et  $g$  non seulement premiers entre eux, mais réels; je dis que les points doubles sont toujours réels sauf dans le cas où les racines de  $f$  et  $g$  sont réelles et se séparent mutuellement.

En effet, on a

$$h = g^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{g} \right) = -f^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{g}{f} \right);$$

par suite, si un de nos polynômes, par exemple  $g$ , a des racines imaginaires, le quotient  $\frac{f}{g}$ , continu de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ , reprend la même valeur pour ces deux valeurs de  $t$ . Il admet ainsi des maxima ou des minima, en même temps  $h$  s'annule. Si  $f$  et  $g$  admettent tous deux des racines réelles, mais que celles de  $f$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  par exemple, soient comprises entre les racines de  $g$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  reste continu dans l'intervalle  $\gamma \delta$  et s'annule à ses extrémités, ainsi  $h$  s'annule de nouveau. Passons au cas où les racines réelles de  $f$  et  $g$  se séparent mutuellement.

Si on fait dans ce cas varier les coefficients de  $f$  et  $g$  de manière que leurs racines conservent la même position relative,  $h$  ne peut devenir carré parfait, puisque  $f$  et  $g$  n'acquièrent pas de facteurs communs; ainsi les racines de  $h = 0$  restent réelles ou imaginaires selon qu'elles l'étaient au début. Or on peut évidemment par les dits changements amener  $f$  à prendre la forme  $(t^2 - 1)$  et  $g$  la forme  $2t$ , polynômes à racines séparées. A cet instant  $h = 2(t^2 + 1)$ , et ses racines sont imaginaires, comme le voulait la proposition énoncée ci-dessus.

Les cas précédents sont évidemment exclusifs les uns des autres, et comme  $h$  est le même, à un facteur près, quand on le déduit de deux polynômes quelconques  $F, G$  du faisceau  $(f, g)$ , on voit que si  $f$  et  $g$  sont deux polynômes à racines réelles se séparant mutuellement,  $F = lf + mg$  et  $G = l'f + m'g$  sont dans le même cas, cela quels que soient les facteurs réels  $l, m, l', m'$ .

4. — *Intégration.* — On sait que la représentation paramétrique (1) est employée dans les éléments pour intégrer les différentielles

$f(x, y) dx$ , attachées à la conique  $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ . Disons, en passant, un mot de cette intégration.

Admettons, pour fixer les idées, que  $g$  n'est pas carré parfait; il y a alors dans le faisceau  $f - xg$  deux carrés parfaits. Soient donc

$$f - x_1 g = A_1 (t - t_1)^2, \quad f - x_2 g = A_2 (t - t_2)^2. \quad (9)$$

L'équation  $x = \frac{f}{g}$  donne

$$g(x - x_1) = A_1 (t - t_1)^2, \quad g(x - x_2) = A_2 (t - t_2)^2, \quad (10)$$

puis

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{t - t_1}{t - t_2} \right)^2,$$

qui n'est qu'une forme nouvelle pour  $x = \frac{f}{g}$ . On y lit que si  $t_1$  et  $t_2$  sont les racines du polynôme  $h$ ,  $x_1$  et  $x_2$  représentent les extrêmums du quotient  $\frac{f}{g}$ , alors que  $t_1$  et  $t_2$  sont les valeurs de la variable correspondant à ces extrêmums.

Posons  $h = gf' - fg'$ , désignons par  $m$  un facteur de proportionnalité, et revenons à l'identité (4), nous avons

$$x = \frac{f}{g}, \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = m \frac{h}{g}, \quad dx = h \frac{dt}{g^2} = \frac{y}{m} \frac{dt}{g}.$$

On a donc

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{m} \frac{dt}{g},$$

ce qui est la formule bien connue de l'Analyse élémentaire. Il est aisé, en la généralisant, de l'adapter à l'intégration des fonctions rationnelles du type  $\frac{rt + s}{f\sqrt{g}} dt$ , où  $r$  et  $s$  sont deux coefficients constants.

Tirons à cet effet de (10)

$$\sqrt{g(x - x_1)} = (t - t_1) \sqrt{A_1}, \quad \sqrt{g(x - x_2)} = (t - t_2) \sqrt{A_2},$$

additionnons celles-ci, après les avoir multipliées par deux facteurs constants, nous aurons

$$\frac{rt + s}{\sqrt{g}} = c_1 \sqrt{x - x_1} + c_2 \sqrt{x - x_2}.$$

Multiplions cette formule à son tour par le facteur

$$\frac{dt}{f} = \frac{m}{x} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{p}{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}},$$

il vient

$$\frac{rt + s}{f\sqrt{g}} dt = b_1 \frac{dx}{x\sqrt{x-x_1}} + b_2 \frac{dx}{x\sqrt{x-x_2}}. \quad (11)$$

C'est là une formule très pratique pour l'intégration des différentielles du premier membre, une fois déterminés en fonction de  $r$  et  $s$  les paramètres  $b_1, b_2$  qu'elle contient.

5. — *Transformations linéaires.* — Nous allons exécuter sur nos polynômes des transformations du type

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{-\beta' t + \beta}{\alpha' t - \alpha}, \quad (12)$$

dont le déterminant  $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$  doit être différent de zéro. Il est ici bien entendu, à titre de convention expresse, que nous nous interdisons la suppression des facteurs communs dans les quatre coefficients  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  de la transformation ci-dessus; ces coefficients comptent ainsi pour eux-mêmes et non pas simplement par leurs rapports mutuels. L'importance de cette convention va ressortir à l'instant.

Le polynôme transformé de  $f(t)$  est, par définition,

$$\varphi(u) = (\alpha' u + \beta')^2 f\left(\frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}\right) \quad (13)$$

Désignons semblablement par  $\gamma(u)$  le transformé de  $g(t)$ , par  $\eta(u)$  le polynôme orthogonal à la fois à  $\varphi(u)$  et  $\gamma(u)$  comme  $h(t)$  est orthogonal simultanément à  $f(t)$  et  $g(t)$ . On a

$$dt = \frac{\delta du}{(\alpha' u + \beta')^2}, \quad \text{puis} \quad \eta(u) = \gamma^2 \frac{d}{du} \left( \frac{\varphi}{\gamma} \right) = (\alpha' u + \beta')^2 \delta g^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{f}{g} \right),$$

donc

$$\eta(u) = \delta (\alpha' u + \beta')^2 h(t);$$

ainsi, sauf le facteur  $\delta$ ,  $\eta(u)$  est précisément le transformé de  $h(t)$ .

Multiplions l'identité fondamentale (4) par le facteur  $\delta^2 (\alpha' u + \beta')^4$ , elle devient, grâce à l'égalité précédente,

$$\eta^2 = \delta^2 [(gg) \varphi^2 - 2(fg) \varphi \gamma + (ff) \gamma^2];$$



mais comme d'autre part

$$\eta^2 = (\gamma\gamma)\varphi^2 - 2(\varphi\gamma)\varphi\gamma + (\varphi\varphi)\gamma^2,$$

la comparaison de ces deux résultats donne de suite les invariants de  $\varphi$  et  $\gamma$ . Ce sont

$$(\varphi\varphi) = \delta^2(ff), \quad (\varphi\gamma) = \delta^2(fg), \quad (\gamma\gamma) = \delta^2(gg); \quad (14)$$

la seconde de ces formules reproduit les deux autres en faisant simplement coïncider les deux formes  $f$  et  $g$ .

Réciproquement je dis que si quatre polynômes  $f, g$  et  $\varphi, \gamma$ , les premiers en  $t$ , les deux autres en  $u$ , sont tels que les relations d'invariance (14) soient vérifiées, il existe une transformation linéaire de déterminant  $\delta$  transformant  $f$  en  $\varphi$  et  $g$  en  $\gamma$ . Pour le montrer, prenons le polynôme doublement quadratique

$$F(t, u) = f(t)\gamma(u) - g(t)\varphi(u),$$

nous allons voir que, les conditions ci-dessus étant supposées vraies, il se décompose en un produit de deux facteurs linéaires en  $t$  et  $u$ .

En effet, le discriminant de  $F$ , relativement à  $t$ , s'écrit

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= (f'\gamma - g'\varphi)^2 - 2(f\gamma - g\varphi)(f''\gamma - g''\varphi), \\ &= (f'^2 - 2ff'')\gamma^2 + 2(f''g + fg'' - f'g')\gamma\varphi + (g'^2 - 2gg'')\varphi^2, \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant les coefficients  $(ff)$ ,  $(fg)$ ,  $(gg)$  par leurs valeurs (14)

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= \frac{1}{\delta^2} \left[ (\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2 - 2(\varphi''\gamma - \gamma''\varphi)(\varphi\gamma - \gamma\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{\delta^2} (\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2. \end{aligned}$$

Ce discriminant est donc carré parfait et la proposition est démontrée.

D'après le calcul qui précède on voit que la condition  $F = 0$ , laquelle contient évidemment toutes les transformations possibles de  $f$  en  $\varphi$ , et de  $g$  en  $\gamma$ , se dédouble dans les deux suivantes

$$F_t' = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta}, \quad \text{et} \quad F_t' = -\frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta}, \quad (15)$$

qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de  $\delta$ .

Prenons l'une d'elles, la première par exemple; alors les conditions compatibles

$$F = 0, \quad F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta},$$

ou bien

$$f\gamma - g\varphi = 0, \quad \left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right)\gamma - \left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right)\varphi = 0,$$

donnent en éliminant le rapport  $\frac{\gamma}{\varphi}$

$$f\left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right) - g\left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right) = 0, \quad \text{soit} \quad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right).$$

On peut donc, au lieu de  $F = 0$ , poser les deux conditions équivalentes

$$F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta}, \quad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right), \quad (16)$$

qui montrent que  $t$  est linéaire en  $u$ , et  $u$  en  $t$ .

Soit donc

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}, \quad (17)$$

la solution des équations ci-dessus (16), admettons que le facteur indéterminé qui figure dans les coefficients  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  a été choisi de manière que  $\alpha\beta' - \alpha'\beta$  soit égal à  $\delta$ . Je dis que cette transformation change  $f$  en  $\varphi$ , et  $g$  en  $\gamma$ .

Soient en effet  $\Phi(u), \Gamma(u)$  les transformées de  $f(t), g(t)$  par cette transformation, ou

$$(\alpha'u + \beta')^2 f(t) = \Phi(u), \quad (\alpha'u + \beta')^2 g(t) = \Gamma(u),$$

d'où  $\frac{f}{g} = \frac{\Phi}{\Gamma}$ ; à cause de  $F(t, u) = 0$  on a aussi  $\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\gamma}$ . Donc, avec un facteur constant de proportionnalité, on a

$$\Phi(u) = K\varphi(u), \quad \Gamma(u) = K\gamma(u).$$

Je dis que ce facteur  $K$  est égal à l'unité.

En effet, récrivons les formules précédentes sous la forme

$$(\alpha'u + \beta')^2 f(t) = K\varphi(u), \quad (\alpha'u + \beta')^2 g(t) = K\gamma(u),$$

et dérivons-les en tenant compte de  $dt = \frac{\delta du}{(\alpha'u + \beta')^2}$ ; il vient

$$\delta f'(t) + 2\alpha'(\alpha'u + \beta')f(t) = K\varphi'(u),$$

$$\delta g'(t) + 2\alpha'(\alpha'u + \beta')g(t) = K\gamma'(u).$$

Éliminons entre celles-ci le terme en  $(\alpha'u + \beta')$ , on a

$$\delta(fg' - f'g) = K(f\gamma' - g\varphi) = K F'_u(t, u) ;$$

il suffit de comparer ce résultat à la seconde formule (16), pour voir que  $K = 1$ .

Le théorème est ainsi démontré ; ayant donc choisi à volonté le signe de  $\delta$  dans la formule (16), il y a deux transformations au déterminant  $\delta$ , déterminées par cette formule même, qui changent  $f$  en  $\varphi$  et  $g$  en  $\gamma$ . En changeant  $\delta$  en  $-\delta$ , on aura de la même manière deux nouvelles transformations, soit quatre en tout, pour effectuer le passage du système  $(f, g)$  au système  $(\varphi, \gamma)$ .

Il est à peine besoin de faire remarquer que si de l'équation  $F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \varphi\gamma'}{\delta}$ , on tirait une transformation de  $t$  en  $u$  au déterminant  $-\delta$ , cette transformation changerait  $f$  en  $-\varphi$ , et  $g$  en  $-\gamma$ .

Terminons par une observation importante.

Nous avons jusqu'à présent pris les polynômes  $f$  et  $g$  comme point de départ ; c'est d'eux qu'ont été tirés les invariants  $a = (ff')$ ,  $b = \dots$ , ainsi que le polynôme conjugué  $h$ , pour former les éléments qui figurent dans l'identité fondamentale (4). Si, à l'inverse, les données sont  $a, b, c$ , on vient de voir que les polynômes  $f$  et  $g$  ne sont plus déterminés qu'aux transformations linéaires près. On pourrait, par exemple, prendre pour  $f$  et  $g$  les polynômes purement quadratiques

$$f = At^2 + B, \quad g = A't^2 + B',$$

les conditions seraient alors

$$a = -4AB, \quad c = -4A'B', \quad b = A'B - BA'.$$

elles pourraient être encore réalisées d'une infinité de manières.

Relativement à la conique fondamentale il y aurait, pour être complet, à rechercher encore la signification géométrique du paramètre  $t$  ; je me dispenserai de mentionner ici cette interprétation très connue et le théorème classique qui s'y rattache sur le rapport anharmonique de quatre points sur une conique.

6. — *Système de trois polynômes conjugués.* — En résumé, soient  $x_1, x_2, x_3$  les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, et  $l_1, l_2, l_3$  trois polynômes du second degré, les relations

$$x_1 = l_1, \quad x_2 = l_2, \quad x_3 = l_3,$$

caractérisent une conique. Si on veut que l'axe  $x_1 = 0$  devienne,

relativement à la conique, la polaire du côté opposé, on doit prendre sauf un facteur constant,  $l_1 = l_2 l'_3 - l_3 l'_2$ .

Supposons la conique rapportée à un triangle autopolaire, son équation ne contiendra plus que des termes carrés; elle est du type

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0 ,$$

dans ce cas, chacun des polynômes  $l$  est le conjugué des deux autres. Ainsi ces polynômes seront premiers deux à deux et linéairement indépendants; aucun n'est carré parfait, en outre ils donnent lieu à une identité telle que

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 ; \quad (17')$$

Réciproquement toutes les fois que trois polynômes, premiers entre eux, sont liés par une semblable relation, celle-ci est unique de son espèce, et ces polynômes sont conjugués deux à deux.

En effet, en différentiant la relation précédente, on a

$$\alpha_1 l_1 l'_1 + \alpha_2 l_2 l'_2 + \alpha_3 l_3 l'_3 = 0 ;$$

par suite

$$\frac{\alpha_1 l_1}{l_2 l'_3 - l_3 l'_2} = \frac{\alpha_2 l_2}{l_3 l'_1 - l_1 l'_3} = \frac{\alpha_3 l_3}{l_1 l'_2 - l_2 l'_1} = \rho , \quad (17'')$$

relations où le facteur de proportionnalité  $\rho$  est nécessairement constant. La proposition est établie.

Il est clair qu'un système de polynômes conjugués le reste par transformation linéaire: si donc on avait pris l'équation de la conique sous sa forme la plus réduite soit  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ , on aurait eu

$$l_1 = t^2 - 1 , \quad l_2 = 2t , \quad l_3 = i(t^2 + 1) , \quad \text{d'où} \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0 . \quad (18)$$

C'est le système conjugué *réduit à sa forme normale*; pour cette forme les trois invariants simultanés sont zéro, et les trois discriminants sont égaux à l'unité. On peut, à partir de la forme normale, reproduire le cas général d'un système conjugué, en transformant les polynômes ci-dessus à l'aide d'une transformation linéaire quelconque, après les avoir affectés de coefficients constants arbitraires.

Reprenons ce cas général, et désignons par la notation  $(l_2 l'_3)$  le déterminant  $l_2 l'_3 - l_3 l'_2$ , et ainsi des autres. On a donc

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 , \quad (19)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 l_1 &= \varphi(l_2 l_3') , & \alpha_2 l_2 &= \varphi(l_3 l_1') , & \alpha_3 l_3 &= \varphi(l_1 l_2') , \\ \alpha_1 l_1' &= \varphi(l_2 l_3'') , & \alpha_2 l_2' &= \varphi(l_3 l_1'') , & \alpha_3 l_3' &= \varphi(l_1 l_2'') , \\ \alpha_1 l_1'' &= \varphi(l_2 l_3''') , & \alpha_2 l_2'' &= \varphi(l_3 l_1''') , & \alpha_3 l_3'' &= \varphi(l_1 l_2''') , \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dans ce tableau les deux dernières lignes proviennent par dérivation de la première, celle-ci n'étant que la reproduction de la formule (17'') ci-dessus.

Composons avec (20) les quantités

$$\alpha_i (2l_i l_i'' - l_i'^2) = \alpha_i (l_i l_i'' - l_i' l_i' + l_i'' l_i) , \quad (i = 1, 2, 3)$$

nous trouvons de suite

$$\alpha_i (2l_i l_i'' - l_i'^2) = \varphi [l_i (l_j l_k'') + l_i' (l_j' l_k) + l_i'' (l_j l_k')]^1 .$$

De là la conséquence suivante : le polynôme  $l_i$  a pour discriminant la quantité

$$- \frac{\varphi}{4\alpha_i} (l_1 l_2 l_3'') . \quad (21)$$

Empruntons encore au tableau (20) les combinaisons suivantes ; elles sont constantes comme il ressort de la valeur des seconds membres

$$\alpha_1 l_1'^2 + \alpha_2 l_2'^2 + \alpha_3 l_3'^2 = - \varphi (l_1 l_2 l_3'') , \quad (22)$$

$$\alpha_1 l_1 l_1'' + \alpha_2 l_2 l_2'' + \alpha_3 l_3 l_3'' = \varphi (l_1 l_2 l_3'') . \quad (23)$$

### III. — Théorie du polynôme du quatrième degré.

7. — Avec trois polynômes conjugués  $l_1^2, l_2^2, l_3^2$ , tels que ceux qu'on a défini au § précédent, composons une forme du 4<sup>me</sup> degré, telle que

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 . \quad (24)$$

L'identité (17') qui règne entre les  $l_i$ , permet, pour une même forme  $l$ , de choisir les coefficients  $c_i$  d'une infinité de manières. On pourrait par exemple faire  $c_i = 0$ , en chassant complètement de

<sup>1</sup> On désigne ici, et plus loin, par  $i, j, k$  les indices 1, 2, 3 permutés circulairement d'une manière quelconque ;  $(l_1 l_2 l_3'')$  représente le déterminant fonctionnel des trois polynômes  $l_i$ .