

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1914)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES NOMBRES A LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ET LA THÉORIE DES PERTURBATIONS  
**Autor:** Weyl, Herm.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15541>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR UNE  
APPLICATION DE LA THÉORIE DES NOMBRES  
A LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ET LA THÉORIE  
DES PERTURBATIONS<sup>1</sup>

---

*Si l'on enroule sur une circonférence de longueur 1 un fil portant des repères équidistants, ces repères formeront, après un nombre infini d'enroulements, sur la circonférence, un ensemble qui non seulement sera dense, mais de plus présentera la même densité partout sur la circonférence.* Nous supposons que la distance séparant deux repères soit mesurée par un nombre irrationnel  $u$  (c'est-à-dire que son rapport à la circonférence soit incommensurable). Ce théorème de la théorie des nombres, d'énoncé simple fut démontré en 1909-1910 presque simultanément par BOHL<sup>2</sup>, SIERPINSKI<sup>3</sup> et WEYL. Je n'entrerai pas dans le détail des démonstrations et me bornerai ici à donner quelques applications de ce théorème, qui formeront le sujet de ma conférence. Permettez-moi d'abord de préciser un peu l'énoncé ci-dessus.

Enrouler la droite des nombres réels sur une circonférence de longueur un, signifie que l'on considère deux nombres comme étant égaux, lorsqu'ils sont congrus suivant le module 1 (c'est-à-dire lorsque leur différence est un nombre entier). Autrement dit, on remplace tout nombre réel  $x$  par le nombre réduit  $(x)$  qui lui est congru suivant le module 1, tel que

$$0 \leq (x) < 1 .$$

*Désignons par  $\alpha = \alpha\alpha'$  une portion quelconque de l'intervalle 01 et par  $n_\alpha$  le nombre des  $n$  nombres*

$$(k\alpha) \quad \left\{ k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \right\}$$

<sup>1</sup> Conférence faite par M. Hermann WEYL, Professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, à la Réunion de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich le 9 mai 1914. Rédaction française de M. Ch. WILLIGENS.

<sup>2</sup> P. BOHL. *Journal f. reine u. angew. Math.*, t. 135 (1909).

<sup>3</sup> W. SIERPINSKI. *Krakau Ak. Anz.*, A, janv. 1910.

situés dans l'intervalle  $\alpha$ ; on a la relation

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = a' - a$$

ceci quel que soit l'intervalle  $aa'$ .

Je passe immédiatement à un deuxième énoncé de ce théorème. J'écrirai pour tout nombre  $x$

$$x = [x] + (x) ,$$

le symbole  $[x]$  introduit par Gauss ayant sa signification habituelle.  $n_\alpha$  peut se représenter par la formule

$$(2) \quad n_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \{ [ku - a] - [ku - a'] \} .$$

En effet, l'expression entre accolades n'est différente de zéro et dans ce cas elle est égale à l'unité que s'il existe un nombre entier  $h$ , tel que

$$ku - a' < h \leq ku - a ,$$

c'est-à-dire lorsque  $ku - h$  ou bien  $(ku)$  est situé entre  $a$  et  $a'$ .  $n_\alpha$  étant défini par la formule (2), la formule (1) reste valable alors même que l'hypothèse  $0 \leq a < a' < 1$  ne se trouve plus réalisée. Désignons par  $\xi$ ,  $\eta$  les coordonnées rectangulaires des points d'un plan et considérons la portion, limitée par des parallèles, définie par

$$\eta \cotg \gamma - a' < \xi < \eta \cotg \gamma - a$$

l'angle  $\gamma$  des droites qui la limitent avec l'axe des  $\xi$  étant défini par la relation

$$\cotg \gamma = u .$$

Le terme général de la somme (2) désigne alors le nombre des points nodaux (à coordonnées entières) de la portion de plan ainsi définie, situés sur la droite  $\eta = k$  parallèle à l'axe des  $\xi$ .  $n_\alpha$  sera le nombre de points nodaux, situés dans cette bande de largeur  $a' - a$  jusqu'à la hauteur  $n$  ( $0 \leq \eta < n$ ). Nous pouvons donner du théorème le 2<sup>e</sup> énoncé suivant:

*Le nombre des points nodaux situés dans une partie de la bande qui a la hauteur  $n$ , tend asymptotiquement lorsque  $n$  croît indéfiniment, vers le nombre qui mesure l'aire de la partie ainsi limitée.* (2<sup>me</sup> énoncé).

Nous allons encore transformer l'énoncé. Soit une longueur  $P_1 P_2$  donnée dans le plan des  $\xi \eta$ . Dessinons cette longueur dans

toutes les positions qu'elle peut prendre par suite de translations dont les composantes suivant les axes des  $\xi$  et  $\eta$  sont mesurées par des nombres entiers. Nous obtenons ainsi tout un réseau de segments. Considérons une flèche se déplaçant d'un mouvement uniforme en suivant une trajectoire rectiligne. La loi du déplacement de la pointe sera définie par les relations :

$$(3) \quad \xi = at + a^* , \quad \eta = bt + b^* , \quad (a, b, a^*, b^* \text{ constantes}) .$$

Combien de segments du réseau notre flèche rencontrera-t-elle par unité de temps, ou bien *combien de fois par unité de temps la flèche passera-t-elle entre les extrémités d'un segment du réseau* ? Notre théorème nous dit que *ce nombre est mesuré par l'aire d'un parallélogramme, construit sur le vecteur  $P_1P_2$  et la vitesse résultante  $(a, b)$  comme côtés.*

Car si nous désignons par  $g'$  la droite qui résulte de la trajectoire  $g$  de la flèche par une translation  $\overrightarrow{P_1P_2}$ , chaque fois que  $g$  rencontre un des segments  $P_1P_2$ , son extrémité  $P_2$  sera dans la portion de plan limitée par les deux parallèles  $g$  et  $g'$ , les extrémités  $P_2$  des segments non rencontrés par  $g$  ne sont pas dans cette région. Les extrémités  $P_2$  forment un réseau de points, il s'agit donc comme précédemment de compter les points nodaux situés dans une portion de plan limitée par deux parallèles. Ce troisième énoncé de notre théorème est dû à M. Bohl<sup>1</sup>.

J'ajoute au dessin obtenu précédemment un réseau de carrés de côté  $\frac{1}{2}$ , défini par les relations

$$\xi = \frac{m}{2} \quad \eta = \frac{n}{2} \quad (m \text{ et } n \text{ nombres entiers}) .$$

Supposons le segment  $P_1P_2$  contenu dans le « carré fondamental »  $0 \leq \xi, \eta \leq \frac{1}{2}$ . Plions le plan le long des côtés du réseau, de sorte que tous les carrés viennent se superposer au carré fondamental<sup>2</sup>. En un point  $\xi, \eta$  du carré fondamental viendront se superposer les points de coordonnées  $m \pm \xi, n \pm \eta$  ( $m$  et  $n$  entiers quelconques et en prenant toutes les combinaisons de signes possibles.) La trajectoire rectiligne (3) est devenue une ligne brisée, telle que la décrirait une bille de billard si le carré fondamental était un billard dont les bandes renvoient la bille suivant la loi ordinaire de la réflexion. Les vitesses de la bille sur les dif-

<sup>1</sup> P. BOHL, *Journal f. reine u. angew. Math.*, t. 135.

<sup>2</sup> Ce procédé est emprunté à un mémoire de MM. D. KÖNIG et A. SZÜCS, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 36.

férentes portions de trajectoire sont

$$\begin{aligned} (+ a, + b), & \quad (+ a, - b), & \quad (- a, + b), & \quad (- a, - b) \\ (+, +), & \quad (+, -), & \quad (-, +), & \quad (-, -). \end{aligned}$$

Chaque fois que notre droite  $g$  rencontre un segment du réseau, la bille franchit le segment  $P_1P_2$  tracé sur le billard, dans la direction  $(+, +)$ ; ceci se produit en moyenne  $J$  fois par unité de temps,  $J$  désignant l'aire du parallélogramme défini par  $P_1P_2$  et la vitesse  $(a, b)$ . Nous choisissons comme unité le double de la longueur d'une bande du billard qui est supposé carré. Si nous prenons la longueur même d'une bande comme unité, nous devons prendre  $\frac{1}{4}J$  au lieu de  $J$ . Si le segment  $P_1P_2$  est perpendiculaire à la vitesse  $(a, b)$  et si l'on construit sur  $P_1P_2$  comme côté un rectangle situé dans le plan du billard et de surface  $R$ , on peut énoncer le résultat comme suit: Considérons la bille pendant l'intervalle de temps très long de  $t=0$  à  $t$ , la durée totale du temps que la bille a employé à traverser le rectangle  $R$  dans le sens  $(+, +)$  se rapproche asymptotiquement de  $\frac{1}{4}Rt$ ,  $t$  croissant indéfiniment. Tout domaine  $G$  tracé sur le billard, peut être considéré, par approximation, comme constitué par de petits rectangles dont les côtés sont parallèles à ceux de  $R$ . C'est pourquoi nous sommes en droit d'affirmer que le temps employé par la bille pour traverser le domaine  $G$  dans le sens  $(+, +)$  pendant une durée très longue d'observation de  $t=0$  à  $t$ , est représenté asymptotiquement par  $\frac{1}{4}Gt$ . Si nous procédons de même pour les trois autres directions,  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(-, -)$  et si nous désignons par  $t_G$  le temps pendant lequel dans l'intervalle d'observation de  $t=0$  à  $t$  la bille s'est trouvée à l'intérieur de  $G$ , le *temps de séjour*, et si nous appelons  $\lim_{t=\infty} \frac{t_G}{t}$  le *temps de séjour relatif*, nous arrivons au théorème :

Le temps de séjour relatif au domaine  $G$  est représenté par l'aire de ce domaine, ou bien, puisque nous pouvons considérer l'aire d'un domaine, comme mesurant la probabilité a priori pour qu'un point choisi arbitrairement sur le billard soit situé dans  $G$ , le *temps de séjour relatif est égal à la probabilité a priori*. (4<sup>me</sup> énoncé).

Une hypothèse fondamentale de la mécanique statistique consiste à admettre que cette loi est valable pour tout système mécanique non ordonné. Représentons l'état d'un système à  $n$  degrés de liberté par  $2n$  coordonnées canoniques, à savoir  $n$  coordonnées de position et  $n$  coordonnées moments  $p_1, p_2, \dots, p_n$  et  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

L'espace à  $2n$  dimensions, dans lequel un système de valeurs de ces coordonnées est représenté par un point, permet de représenter les états successifs par une courbe, l'état initial étant donné : et l'espace se décomposera en  $\infty^{2n-1}$  de ces courbes, qui ne se rencontrent jamais. Pour développer la mécanique statistique (par exemple la théorie cinétique des gaz) il est nécessaire que l'une quelconque de ces trajectoires passe finalement aussi près que l'on voudra de tout point de l'espace, et que la durée de séjour moyenne dans des domaines égaux soit constante (Ergodenhypothese). Ce principe est un peu modifié par le fait que la courbe doit se trouver en outre sur une surface d'énergie constante, mais en ce moment j'en fais abstraction. *Notre bille de billard est l'exemple le plus simple satisfaisant à l'hypothèse ci-dessus, du moins en ce qui concerne les coordonnées de position.* L'hypothèse n'est pas valable dans notre exemple pour les coordonnées moments, qui sont ici les composantes de la vitesse, n'admettant que les quatre valeurs  $(\pm a, \pm b)$ .

Quoique notre théorème de théorie des nombres et les idées qui interviennent dans sa démonstration soient plus intimement liés à la mécanique statistique qu'il ne ressort de l'exemple de la bille de billard, je me contenterai de cette indication et je passe à l'application à la théorie des perturbations en astronomie.

Il s'agit d'un système de planètes se mouvant autour d'un astre central, le Soleil (dépassant de beaucoup les planètes en masse). Ce système de masses admet un centre de gravité et un *plan invariable* passant par ce point, qui se trouve déterminé grâce au théorème des aires. Les trajectoires des planètes sont en première approximation des ellipses (loi de Kepler), dont les éléments sont toutefois soumis à des variations lentes, les *perturbations*. Les éléments entrant en ligne de compte sont :

*la longitude du nœud ascendant.* (Le nœud est la droite d'intersection du plan de l'orbite et du plan invariable ; on fixe sa position en mesurant sa distance angulaire à partir d'une direction fixe, choisie une fois pour toutes dans le plan invariable ;

*l'inclinaison de l'orbite* (angle du plan de la trajectoire avec le plan invariable) ;

*la longitude du périhélie* (mesurée dans le plan invariable depuis la direction fixe jusqu'au nœud, ensuite dans le plan de l'orbite jusqu'au périhélie) ;

*l'excentricité numérique ;*

*le demi grand axe.*

Prenons la masse du Soleil comme unité et représentons la masse des planètes par  $\varepsilon m_h$ ,  $m_h$  étant un certain nombre fini pour chaque planète, le facteur  $\varepsilon$  par contre doit indiquer la petitesse des masses des planètes ; nous le supposons tout de suite infiniment petit. Des perturbations appréciables ne se produisent

alors que dans des intervalles de temps séculaires, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Pour étudier les perturbations, au lieu de nous servir de « l'année » (durée de révolution d'une planète autour du soleil) comme unité de temps, nous nous servirons du temps séculaire  $t = \varepsilon t'$ ,  $t'$  étant le temps mesuré en années. En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro on parvient en passant à la limite aux équations différentielles des perturbations séculaires. L'une d'elles exprime la célèbre loi de stabilité de Laplace: *Les demi-grands axes des trajectoires planétaires sont constants*. Il faut réunir les éléments suivants, soumis à des variations séculaires :

1) l'excentricité numérique  $r$  et la longitude du périhélie  $2\pi\sigma$ , à l'aide desquels je forme le nombre complexe <sup>1</sup>

$$z = re^{2\pi i\sigma} = r(\cos 2\pi\sigma + i \sin 2\pi\sigma) :$$

2) Le sinus de l'inclinaison de l'orbite  $j$  et de la longitude du nœud  $2\pi\omega$ , que je réunis dans la formule

$$u = \sin j \cdot e^{2\pi i\omega} .$$

Si l'on se borne aux termes du 1<sup>er</sup> degré, ce qui suppose une excentricité et une inclinaison très petites, on obtient des équations de la forme :

$$\frac{dz_h}{dt} = i \sum_k a_{h,k} z_k ,$$

les constantes réelles  $a_{h,k}$  désignant les coefficients d'une certaine forme quadratique positive. Pour  $u$  on obtient des équations analogues. Si l'on transforme la forme quadratique en prenant les axes de symétrie comme axes de coordonnées,  $z$  devient

$$z = \sum_h \Lambda_h e^{2\pi i a_h t} ,$$

$a_h$  étant des nombres réels positifs (inverses des carrés des axes) ayant les mêmes valeurs pour toutes les planètes du système, tandis que les constantes complexes  $\Lambda_h$  se rapportent à une seule de ces planètes. Posons

$$\Lambda_h = \mathcal{A}_h e^{2\pi i a_h^*} \quad (\mathcal{A}_h \geq 0, \quad a_h^* \text{ réel})$$

on a

$$z = \sum_h \mathcal{A}_h e^{2\pi i (a_h t + a_h^*)} .$$

<sup>1</sup> Je m'écarte ici des notations d'usage en astronomie, qui pourraient prêter à confusion avec les quantités  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$  des mathématiques pures, dont il est fait usage ici.

Ne considérons d'abord comme M. Bohl que le cas de trois planètes :

$$(4) \quad z = \mathcal{A}e^{2\pi i(at + a^*)} + \mathcal{B}e^{2\pi i(bt + b^*)} + \mathcal{C}e^{2\pi i(ct + c^*)}$$

Quoique la théorie classique des perturbations séculaires soit basée sur la conception de l'univers d'après Kepler et Newton et non d'après Ptolémée, nous ferons bien de nous représenter la dernière relation à l'aide d'un mécanisme d'épicycles. Supposons située dans le plan des nombres complexes  $z$  une roue de rayon  $\mathcal{C}$  de centre  $z = 0$  mobile autour de son centre. Une deuxième roue de rayon  $\mathcal{B}$  a son centre situé sur la circonférence de la première et finalement une troisième roue a son centre sur la circonférence de la seconde et se trouve munie d'un repère sur sa circonférence. Si nous faisons tourner la première roue avec une vitesse angulaire  $2\pi c$ , la seconde avec une vitesse  $2\pi(b - c)$ , la troisième avec la vitesse  $2\pi(a - b - c)$ , l'équation (4) représente le mouvement résultant du repère  $z$ . Il s'agit maintenant de trouver pour l'accroissement de l'azimut  $2\pi\sigma$  (longitude du périhélie) une loi valable à la limite  $t = \infty$ . Nous pouvons supposer la roue de centre  $z = 0$  immobile, car nous n'aurons qu'à composer son mouvement avec celui obtenu dans cette hypothèse pour le repère :

$$z = e^{2\pi i(ct + c^*)} z_1 ; \quad z_1 = \mathcal{A}e^{2\pi i(a_1 t + a_1^*)} + \mathcal{B}e^{2\pi i(b_1 t + b_1^*)} + \mathcal{C}$$

$$a_1 = a - c , \quad a_1^* = a^* - c^* , \quad b_1 = b - c ; \quad b_1^* = b^* - c^* .$$

L'azimut  $2\pi\sigma_1$  de  $z_1 = re^{2\pi i\sigma_1}$  est relié à  $\sigma$  par la relation

$$\sigma = \sigma_1 + (ct + c^*) .$$

Nous pouvons étudier le mouvement de  $z_1$  au lieu de celui de  $z$ , ce qui revient à poser en supprimant l'indice 1,  $c = c^* = 0$ .

Toutes les positions de  $z$  possibles au point de vue cinématique (la roue principale de centre  $z = 0$  étant fixe) sont données par

$$(5) \quad z = \mathcal{A}e^{2\pi i\xi} + \mathcal{B}e^{2\pi i\eta} + \mathcal{C} .$$

Les quantités réelles  $\xi, \eta$  pouvant prendre toutes les valeurs possibles, peuvent être considérées comme coordonnées d'un point d'un plan. Le mouvement réel sera défini par

$$(6) \quad \xi = at + a^* \quad \eta = bt + b^* ;$$

elle est donc représentée par une droite parcourue avec une vitesse uniforme.



Si  $\mathcal{C} > \mathcal{A} + \mathcal{B}$  cas de Lagrange on a pour toutes les positions possibles du repère

$$|2\pi\sigma| \leq 2\pi\sigma^0 < \frac{\pi}{2}, \quad \sigma < \frac{1}{4}.$$

$2\pi\sigma^0$  étant un angle défini par la relation

$$\sin 2\pi\sigma^0 = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{\mathcal{C}}.$$

Dans ce cas le repère ne peut parcourir un chemin enveloppant l'origine. Supprimons l'hypothèse  $c = c^* = 0$ , nous aurons

$$|\sigma - ct + c^*| < \frac{1}{4} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = c.$$

Le mouvement de la roue principale décide tout. *Le périhélie a un mouvement moyen*, c'est-à-dire qu'en moyenne par unité de temps, il se déplace de la quantité  $2\pi c$  dans le sens du mouvement de la planète. Ce résultat est valable dans un système de plus de trois planètes, pour chacune d'entre celles pour lesquelles la condition de Lagrange est vérifiée, c'est-à-dire quand l'un des nombres  $\mathcal{A}_h$  est plus grand que la somme des autres. Cette condition est remplie pour les huit grandes planètes de notre système solaire sauf pour Vénus et la Terre. Il n'y a donc que pour ces deux planètes que l'on ignore si elles ont un déplacement moyen du périhélie et du nœud ascendant, dans le sens du mouvement planétaire.

C'est à M. Bohl que revient le mérite d'avoir traité le second cas où aucun des trois nombres  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  n'est supérieur à la somme des deux autres. Je vais tâcher d'établir rapidement son principal résultat, de telle sorte qu'il soit facile de l'étendre à plus de trois planètes, ce à quoi M. Bohl ne semble pas être parvenu.

Définissons  $z = re^{2\pi i\sigma}$  par la relation  $\xi$  et considérons toutes les positions possibles au point de vue cinématique du repère, la roue principale étant au repos.  $\sigma$  est alors une fonction de  $\xi$ ,  $\eta$  qui n'est pas uniforme, mais présente aux points où  $z = 0$  des points de ramification d'ordre infini, c'est-à-dire pour une position du mécanisme telle que le repère soit confondu avec l'origine. Il y a deux telles positions, répondant à ce fait que l'on peut, connaissant les trois côtés, construire deux triangles (symétriques, mais non directement égaux). Désignons par  $\pi\alpha$ ,  $\pi\beta$ ,  $\pi\gamma$  les angles du triangle de côtés  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , nous avons comme solutions de l'équation  $z = 0$

$$\xi = \frac{1 - \beta}{2}, \quad \eta = \frac{1 + \alpha}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1 + \beta}{2}, \quad \eta = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

ainsi que tous les points  $\xi, \eta$ , dont les coordonnées sont congrues à celles-ci mod. 1.

Réunissons les deux points ainsi obtenus par un segment de droite le long duquel nous ferons une coupure dans le plan, ainsi que le long de tous les segments qui s'en déduisent par des translations dont les composantes sont mesurées par des nombres entiers. Des considérations géométriques simples montrent que dans le plan ainsi obtenu, la fonction  $\sigma = \sigma_0(\xi, \eta)$  est uniforme et continue et que pour chacune des variables  $\xi, \eta$  elle admet la période un. Par conséquent  $\sigma_0(\xi, \eta)$  est une fonction bornée (en valeur absolue elle reste inférieure à  $\frac{1}{2}$ ). Lorsque le point  $\xi, \eta$  traverse une coupure, la fonction subit une diminution brusque de valeur d'une unité. Poursuivons la variation continue de  $\sigma$  pendant que le point  $\xi, \eta$  décrit la trajectoire rectiligne définie par (6). Si nous partons de  $t=0$  correspondant à la valeur initiale  $\sigma = \sigma_0(a^*, b^*)$  au bout du temps  $t$  pendant lequel la trajectoire a franchi  $n_t$  coupures,  $\sigma = \sigma_0 + n_t$ , on a donc pour tous les temps  $|\sigma - n_t| \leq \frac{1}{2}$ . Nous avons trouvé pour  $n_t$  une valeur asymptotique  $Jt$ ,  $J$  désignant l'aire d'un parallélogramme dont les côtés sont le segment le long duquel s'étend la coupure et le vecteur de composantes  $(a, b)$ :  $J = a\alpha + b\beta$  (le rapport  $\frac{a}{b}$  étant supposé incommensurable). Nous trouvons donc la loi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = a\alpha + b\beta.$$

Si nous supprimons l'hypothèse  $c = c^* = 0$  nous devons remplacer dans le 2<sup>e</sup> membre  $a$  et  $b$  par  $a - c$  et  $b - c$ , et ajouter  $c$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Cette belle loi due à Bohl constitue un cinquième énoncé de notre théorème. Il dit que *même dans le cas non traité par Lagrange il existe un déplacement moyen du périhélie dans le sens positif qui n'est pas donné par l'une des vitesses angulaires  $a, b, c$ , mais par une certaine valeur moyenne de ces trois quantités.*

Si l'on veut étendre la loi de Bohl à quatre et plus de planètes, il faut étendre le théorème de la théorie des nombres, qui nous a servi de base, à plusieurs nombres irrationnels considérés simultanément. Pour deux nombres  $u$  et  $v$  irrationnels qui ne sont pas liés par une relation linéaire à coefficients entiers il s'énonce alors :

*Si nous considérons dans un plan un système de coordonnées rectangulaires, les points admettant les coordonnées  $(nu)$   $(nv)$*

*réduites suivant le module un ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ne forment pas seulement dans le carré ayant l'unité pour côté un ensemble dense (c'est l'énoncé d'un célèbre théorème d'approximation de Kronecker), mais ils présentent encore partout la même densité.*

Les démonstrations de Bohl et de Sierpinski (qui sont identiques dans leurs traits essentiels) ne se prêtaient pas à une généralisation telle qu'elle est nécessaire ici. C'est pour cette raison semble-t-il que M. Bohl a dû se borner au cas de trois planètes. Il y a à peu près un an, j'ai présenté à Göttingue une démonstration valable pour deux et un nombre supérieur de nombres irrationnels, se basant sur l'invariant analytique  $e^{2\pi ix}$  des classes de nombres mod. 1 et la théorie des séries de Fourier. Elle paraîtra prochainement, ainsi que les résultats d'autres recherches du même ordre d'idées, dans les « Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen »<sup>1</sup>. Une autre démonstration élémentaire me fut communiquée peu après par M. H. Bohr.

En nous appuyant sur le théorème énoncé ci-dessus pour deux nombres irrationnels, nous pouvons aborder l'étude des perturbations dans le cas de quatre planètes.

Dans un espace rapporté aux coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$ , considérons une courbe fermée  $\mathcal{L}$  sur laquelle nous choisirons un sens de circulation. Considérons en outre la trajectoire rectiligne d'une flèche se déplaçant d'un mouvement uniforme

$$\xi = at + a^* , \quad \eta = bt + b^* , \quad \zeta = ct + c^* .$$

Nous supposerons que la flèche ne rencontre pas la courbe  $\mathcal{L}$ , dans quelles conditions dirons-nous qu'elle traverse cette courbe ? Par un point O de la trajectoire de la flèche menons un plan E perpendiculaire à cette droite, sur lequel nous projeterons  $\mathcal{L}$  orthogonalement suivant  $\overline{\mathcal{L}}$ . Si dans le plan E la courbe  $\overline{\mathcal{L}}$  enveloppe  $m$  fois le point O (c'est-à-dire si le rayon vecteur  $\overline{OP}$  décrit un angle  $2\pi m$ , lorsque le point P décrit la courbe  $\overline{\mathcal{L}}$  dans le sens de circulation) nous dirons que la flèche traverse  $m$  fois la courbe  $\mathcal{L}$  ( $m$  pouvant être négatif). Si nous avons deux plans  $E_1$  et  $E_2$  perpendiculaires à la trajectoire de la flèche, entre lesquels la courbe  $\mathcal{L}$  est entièrement située, qui sont rencontrés par la flèche aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , les  $m$  passages à travers la courbe seront effectués dans le temps qui s'écoule entre  $t_1$  et  $t_2$ . Nous n'avons pas besoin de fixer le moment précis de ces passages. Construisons à l'aide de  $\mathcal{L}$  un réseau en lui faisant subir toutes les translations ayant des composantes mesurées par des nombres entiers, suivant les trois axes de coordonnées, et cherchons combien de fois la flèche

<sup>1</sup> *L. c.*, séance du 13 juin 1914.

traversera de courbes du réseau en moyenne par unité de temps. Ce nombre sera mesuré par le volume d'un tronc de cylindre, ayant pour directrice  $\mathcal{L}$ , pour direction des génératrices la trajectoire de la flèche et pour hauteur la vitesse de la flèche :

$$(7) \quad v = \frac{a}{2} \int_{(\mathcal{L})} (\eta d\zeta - \zeta d\eta) + \frac{b}{2} \int_{(\mathcal{L}')} (\zeta d\xi - \xi d\zeta) + \frac{c}{2} \int_{(\mathcal{L}''')} (\xi d\eta - \eta d\xi) .$$

Dans un système de quatre planètes nous avons pour l'une d'elles :

$$z = re^{2\pi i\sigma} = \sum_h \mathcal{A}_h e^{2\pi i\xi_h} \quad \xi_h = a_h t + a_h^* \quad (h = 1, 2, 3, 4) .$$

Nous représenterons de nouveau notre trajectoire dans le plan des  $z$  à l'aide d'un système d'épicycles qui se composera de 4 roues de rayons  $\mathcal{A}_h$ . La roue principale de centre  $z = 0$  aura pour rayon  $\mathcal{A}_4$  et ce ne sera pas une restriction que de la supposer immobile ou ce qui revient au même de supposer  $a_4 = a_4^* = 0$ .

Faisons abstraction du cas connu, traité par Lagrange. Il sera possible d'amener le repère à passer par l'origine, c'est-à-dire de construire un quadrilatère à l'aide des quatre côtés  $\mathcal{A}_h$ . Ce quadrilatère n'est pas complètement déterminé (comme le triangle dans le cas précédent) mais possède encore un degré de liberté. Nous avons un quadrilatère plan articulé.  $2\pi\xi_h$  sont les angles des côtés avec une direction fixe choisie dans le plan une fois pour toutes. Nous avons deux cas à considérer.

*1<sup>er</sup> cas* : La somme du plus grand et du plus petit côté est supérieure à la somme des deux côtés moyens. On peut parcourir en un seul cycle toutes les formes du quadrilatère articulé, les six différences d'angles

$$\xi_2 - \xi_3, \quad \xi_3 - \xi_1, \quad \xi_1 - \xi_2, \quad \xi_1 - \xi_4, \quad \xi_2 - \xi_4, \quad \xi_3 - \xi_4$$

revenant à leurs valeurs primitives. Si nous maintenons  $\xi_4$  constant, c'est-à-dire si nous prenons  $\mathcal{A}_4$  comme base fixe du quadrilatère (par exemple, soit  $\xi_4 = 0$ ), le point de coordonnées rectangulaires  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  dans l'espace décrit une courbe fermée  $\mathcal{L}$ , qui n'est toutefois déterminée qu'à une translation près à composantes entières. Nous sommes donc en présence d'un réseau de courbes sur lesquelles  $z = 0$ . Le quadrilatère articulé est alors un système oscillant double, c'est-à-dire les deux bras ne peuvent qu'osciller de part et d'autre sans effectuer de tour complet.

*2<sup>me</sup> cas* : Toutes les formes distinctes possibles du quadrilatère articulé font partie de deux cycles sans que le passage de l'un à

l'autre puisse s'effectuer d'une façon continue. Si  $\mathcal{A}_4$  est le plus petit côté, les différences  $\xi_1 - \xi_4$ ,  $\xi_2 - \xi_4$ ,  $\xi_3 - \xi_4$  augmentent de  $\pm 1$  pendant que l'on décrit un cycle. Les trois autres différences d'angles reviennent à leurs valeurs primitives. Suivant les côtés que l'on choisit comme base, tige d'accouplement et bras du quadrilatère articulé nous aurons un système à deux bras effectuant des tours complets, un bras tournant, l'autre oscillant ou enfin les deux bras oscillant.

Je me bornerai au premier cas ; la discussion du second cas n'est pas essentiellement différente. Supposons  $a_4 = a_4^* = 0$ . De la formule (7) nous déduirons par des considérations analogues à celles qui nous ont conduit au but dans le cas de trois planètes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = \frac{a_1}{2} \int_{(\mathcal{L}^c)} (\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2) + \frac{a_2}{2} \int_{(\mathcal{L}^c)} (\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3) + \frac{a_3}{2} \int_{(\mathcal{L}^c)} (\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1) .$$

Si nous supprimons la condition  $a_4 = a_4^* = 0$  nous devons remplacer dans le 2<sup>me</sup> membre  $a_1, a_2, a_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  par  $a_1 - a_4, a_2 - a_4, a_3 - a_4, \xi_1 - \xi_4, \xi_2 - \xi_4, \xi_3 - \xi_4$  et ajouter  $a_4$ . Pour écrire le résultat simplement, nous introduirons les intégrales :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \int \left\{ (\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2) + (\xi_3 d\xi_4 - \xi_4 d\xi_3) + (\xi_4 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_4) \right\}$$

et des expressions analogues  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Ces notations doivent être interprétées comme suit :  $2\pi\xi_h$  désignent les angles que forment les côtés du quadrilatère avec une direction fixe du plan. Les intégrales s'étendent à un cycle complet parcouru dans le plan par le quadrilatère articulé et dans lequel il prend toutes les formes que peut prendre un quadrilatère de côtés  $\mathcal{A}_h$ . La façon dont sont parcourues toutes ces formes possibles dépend de trois fonctions arbitraires du temps, mais elles sont sans influence sur les quantités  $\alpha_h$ , et bien entendu les quantités  $\alpha_h$  ne dépendent pas de la direction fixe à partir de laquelle on a mesuré les angles  $2\pi\xi_h$ . On pourra appeler à bon droit les quantités  $\alpha_h$  les *invariants intégraux* du quadrilatère articulé. On obtient pour le mouvement moyen du périhélie l'expression :

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) .$$

Le résultat devant être symétrique en  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  on trouve :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{t} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4 .$$

Je ne suis pas arrivé à vérifier le premier résultat, à savoir que la somme des quatre invariants intégraux d'un quadrilatère articulé est égale à l'unité, partant de leur définition. La dernière relation permet de supposer que les relations qui lient les quatre côtés aux quatre invariants intégraux d'un quadrilatère articulé sont l'analogie des relations entre les côtés et les angles d'un triangle fixe. Ce sont ces relations et non celles entre les côtés et les angles d'un quadrilatère fixe qui semblent être l'analogie la plus proche et la plus naturelle de la théorie des triangles plans. J'ignore jusqu'à quel point ceci est vrai; mais on se rend en tout cas compte que l'on a devant soi le point de départ d'une théorie plus approfondie des quadrilatères articulés.

Les invariants intégraux sont positifs. Dans le cas discuté nous avons donc de nouveau un déplacement moyen du périhélie dans le sens positif, déterminé par une valeur moyenne des vitesses  $2\pi a_b$  des différentes roues de l'épicycle.

Le mouvement moyen du périhélie et du nœud ascendant a été étudié pour toutes les planètes, sauf Vénus et la Terre, avec le plus de soin par Stockwell<sup>1</sup>. Pour les déterminer il faut être certain que l'on a affaire au cas de Lagrange, après quoi on n'a plus qu'à déterminer les quantités  $a_1, a_2, \dots, a_8$ , pour notre système planétaire, c'est-à-dire à rapporter à ces axes de symétrie une forme quadratique de huit variables. Si l'on veut résoudre le même problème pour la Terre et Vénus, il faut calculer les quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ , correspondant à ces deux planètes, puis évaluer des intégrales quintuples, étendues à toutes les formes distinctes prises par un octogone articulé. Les calculs que ceci entraînerait pourraient faire reculer, et renoncer à les effectuer réellement.

On peut toutefois affirmer que Vénus et la Terre présentent également un mouvement moyen du périhélie dans le sens du mouvement planétaire. Le mouvement rétrograde actuel du périhélie de Vénus ne saurait donc être qu'un phénomène passager.

J'espère vous avoir montré, par ces quelques développements, comment la théorie des nombres peut être appelée à jouer un rôle dans les applications des mathématiques.

Herm. WEYL (Zurich).

<sup>1</sup> *Smithsonian Contributions to Knowledge*, vol. XVIII, 1870.