

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'INTÉGRALE DE STIELTJES ET SA GÉNÉRALISATION
Autor: Young, W. H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15530>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'INTÉGRALE DE STIELTJES ET SA GÉNÉRALISATION

1. — Primitivement restreint à la classe des fonctions continues, le champ des fonctions intégrables a été successivement étendu de manière à embrasser non seulement toutes les fonctions bornées — c'est-à-dire toutes les fonctions dont les valeurs restent comprises entre deux nombres finis appelés les bornes supérieure et inférieure de la fonction — mais encore une classe étendue de fonctions non bornées. Cette extension a eu comme conséquence un progrès notable des mathématiques.

Or, Stieltjes a généralisé la notion d'intégrale en remplaçant la variable indépendante x par une fonction monotone $g(x)$ non décroissante. Bien qu'il n'ait appliqué sa généralisation de l'intégrale que dans le champ primitif restreint des fonctions continues et qu'il n'ait guère envisagé son extension et son emploi dans le champ des fonctions intégrables au sens de Riemann, les conséquences qu'il en tire ont une importance comparable à celles qui résultent de l'application de la définition ordinaire de l'intégrale d'une fonction continue. Aussi, tout mathématicien versé dans la théorie moderne de l'intégration et qui a éprouvé dans ses recherches la liberté d'action que le vaste champ des fonctions bornées lui permet, ne tarde pas à se demander si dans l'emploi de l'intégrale de Stieltjes il ne peut pas aussi dépasser les limites du champ primitif.

Lebesgue a éprouvé ce désir. En 1909, il publie dans les Comptes Rendus une Note, où il démontre, par un artifice très élégant dépendant d'un changement de variable de nature en quelque sorte géométrique, que la notion de l'intégrale de Stieltjes peut être ramenée à celle de l'intégrale

d'une fonction bornée. Il établit, en effet, que si $f(x)$ est une fonction continue et $g(x)$ une fonction monotone non décroissante, on peut par un changement de variable $x = x(y)$, écrire

$$\int f(x) dg(x) = \int f(x(y)) \theta(y) dy = \int \varphi(y) dy$$

$\theta(y)$ et par suite $\varphi(y)$ étant bornées. Il tire de son raisonnement la conséquence que l'on peut — je cite les derniers mots de sa note — « se permettre le prolongement de l'opération de l'intégration de Stieltjes, supposée connue pour les fonctions continues, à tout le champ des fonctions sommables bornées. On définit en somme l'intégrale de Stieltjes pour f sommable bornée et g à variation bornée, ce qu'il paraît difficile de faire sans changement de variable. » Le raisonnement de Lebesgue est d'une finesse remarquable mais d'une application difficile dans les cas qui surviennent dans la pratique. Il suppose d'ailleurs déjà surmontées les difficultés de la théorie de l'intégration moderne. Remarquons enfin que Lebesgue n'a pas utilisé sa définition de l'intégrale d'une fonction bornée par rapport à une fonction à variation bornée.

Je me propose de donner dans ce qui suit les traits les plus saillants d'une nouvelle théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée. Cette théorie n'exige ni la connaissance de la théorie des ensembles ni celle des intégrales de Riemann ou de Lebesgue. Je signalerai quelques résultats frappants de cette théorie et quelques applications nouvelles à la théorie des séries de Fourier. Le lecteur pourra trouver les détails de la théorie et les démonstrations dans différents mémoires présentés à la Société royale de Londres et à la London Math. Society¹.

2. — Le rôle que jouent les suites monotones de fonctions

¹ « On Integration with Respect to a Function of Bounded Variation ». *Proc. L. M. S.*, Série 2, Vol. 13, p. 109.

« On the Usual Convergence of a Class of Trigonometrical Series », *Ibid.*, pp. 13-28.

« On Fourier Series and Functions of Bounded Variation », *Roy. Soc. Proc.*, A. Vol. 88, pp. 561-568.

« On the Condition that a Trigonometrical Series should have a Certain Form », *Ibid.*, pp. 569-574.

est fondamental dans ma théorie de l'intégration. Soit

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots \quad \rightarrow f(x)$$

une suite monotone non décroissante, ou

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_n(x) \geq \dots \quad \rightarrow f(x)$$

une suite monotone non croissante, bornée dans son ensemble, c'est-à-dire telle que pour toute valeur de n et de x ,

$$A \leq f_n(x) \leq B$$

A et B étant des constantes finies. La fonction limite $f(x)$ de cette suite sera également bornée,

$$A \leq f(x) \leq B$$

et son caractère dépendra de celui des fonctions $f_n(x)$. C'est par l'intermédiaire de telles suites monotones que nous répartirons les fonctions bornées en classes jouant un rôle important pour l'intégration.

Supposons, en effet, connue une théorie de l'intégration par rapport à $g(x)$ d'une certaine classe de fonctions. On étendra alors le champ d'intégration au moyen du principe suivant :

On dira qu'une fonction $f(x)$ possède une intégrale $\int f(x) dg(x)$ par rapport à une fonction positive non décroissante $g(x)$, si elle peut s'exprimer comme limite (finie ou infinie avec signe déterminé) d'une suite monotone de fonctions f_1, f_2, \dots , dont les intégrales par rapport à $g(x)$ sont déjà définies, pourvu que la limite des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de $f(x)$ par rapport à $g(x)$.

Etudions d'abord de ce point de vue l'intégration ordinaire par rapport à x . La classe la plus simple de fonctions dans une intervalle (a, b) est formée par les fonctions qui sont constantes à l'intérieur (au sens étroit) de chaque intervalle partiel (x_i, x_{i+1}) d'une division de (a, b) en un nombre fini d'intervalles et qui, aux extrémités de ces intervalles partiels ont des valeurs quelconques. L'intégrale d'une

fonction *simple*, c'est-à-dire d'une fonction de cette classe, par rapport à la variable indépendante x est naturellement la somme $\sum c_i t_i$ d'un nombre fini de termes relatifs à chacun des intervalles partiels, c_i désignant la valeur constante de la fonction à l'intérieur de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et t_i la longueur $x_{i+1} - x_i$ de cet intervalle.

Désignons pour abrégier une fonction semi-continue supérieurement ou inférieurement au sens de Baire par les lettres u ou l , abréviations pour *upper* ou *lower* semi-continuous functions. On établit facilement que toute fonction u est la limite d'une suite non croissante et toute fonction l la limite d'une suite non décroissante de fonctions *simples*. De plus, la limite d'une suite non croissante de fonctions u est encore une fonction u , celle d'une suite non décroissante de fonctions l est encore une fonction l . Par contre, la limite d'une suite non décroissante de fonctions u est en général une fonction appartenant à une nouvelle classe que nous désignerons par lu et la limite d'une suite non croissante de fonctions l une fonction appartenant à une nouvelle classe que nous désignerons par ul . Si nous considérons de même des suites monotones de fonctions lu et ul , nous retrouverons soit ces deux classes soit deux nouvelles classes lul et ulu de fonctions. En continuant ainsi nous obtenons une série illimitée de classes

$$u, l, ul, lu, ulu, lul, ulul, lulu, \dots$$

de fonctions. Enfin, la considération de suites monotones de fonctions de classes différentes nous conduira à de nouvelles classes non exprimables par les symboles précédents, etc. Toute fonction bornée représentable analytiquement rentre dans une des classes de fonctions ainsi caractérisées. Le problème de l'intégration sera résolu si, à partir de la définition de l'intégrale des fonctions *simples*, nous pouvons, au moyen du principe général énoncé plus haut, attribuer une intégrale d'abord aux fonctions bornées des classes u, l puis des classes ul, lu, ulu, lul, \dots etc. Mais, fait intéressant et capital, grâce à un théorème que nous indiquerons plus loin, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire

d'étudier séparément au point de vue de l'intégration toutes ces classes de fonctions et qu'il suffit de savoir intégrer les fonctions *ul* et les fonctions *lu* pour pouvoir affirmer l'intégrabilité de toute fonction bornée représentable analytiquement.

3. — La théorie de l'intégration par rapport à une fonction monotone $g(x)$ se développe de la même manière. Considérons d'abord une fonction *simple* $f(x)$ et soit (x_i, x_{i+1}) un des intervalles partiels à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ a une valeur constante $f(x_i + 0) = f(x_{i+1} - 0)$. Nous aurons à tenir compte ici des valeurs de $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et nous définirons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dg(x) = f(x_i) [g(x_i + 0) - g(x_i)] + f(x_i + 0) [g(x_{i+1} - 0) - g(x_i + 0)] + f(x_{i+1}) [g(x_{i+1} + 0) - g(x_{i+1})].$$

Lorsque $g(x)$ est continue aux points x_i, x_{i+1} les termes correspondants à ces points s'annulent. En particulier, si $g(x) = x$, nous retombons sur la définition de l'intégrale ordinaire d'une constante. L'intégrale de la fonction *simple* $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) sera, par définition, la somme des intégrales étendues aux intervalles partiels (x_i, x_{i+1}) .

On étendra ensuite aux fonctions bornées de classes *l*, *u*, *lu* et *ul* la notion d'intégration par rapport à $g(x)$. Il suffira pour cela de montrer l'existence et l'unicité de la limite des intégrales de suites monotones bornées ayant une limite donnée, lorsque les termes de la suite et sa limite appartiennent aux classes *l*, *u*, *lu* ou *ul*. On étendra ensuite la notion d'intégrale par rapport à $g(x)$ à toute fonction bornée représentable analytiquement en démontrant le théorème suivant :

Etant donnée une fonction $f(x)$ bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction lu qui ne dépasse pas $f(x)$ et une fonction ul qui n'est pas moindre que $f(x)$, ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction non décroissante $g(x)$ donnée.

Il résulte de ce théorème que la fonction bornée $f(x)$ a une intégrale par rapport à $g(x)$ et que la valeur de cette intégrale

est égale à la valeur commune des intégrales des deux fonctions auxiliaires lu et ul .

Après avoir développé la théorie de l'intégration des fonctions bornées par rapport à une fonction non décroissante $g(x)$, nous pouvons aborder l'intégration des fonctions non bornées. Les mêmes raisonnements sont encore applicables; ils exigent simplement plus de soin et il est nécessaire d'introduire quelquefois l'hypothèse que les limites obtenues sont finies; cette hypothèse était superflue lorsque toutes les suites considérées étaient bornées. On arrive de cette façon à définir la classe des fonctions sommables par rapport à $g(x)$, c'est-à-dire des fonctions bornées ou non possédant une intégrale par rapport à $g(x)$. Cette classe comprend, comme nous l'avons déjà dit, toutes les fonctions bornées exprimables analytiquement; elle comprend encore toutes les fonctions dont le module $|f(x)|$ est lui-même sommable par rapport à $g(x)$.

L'extension à l'intégration par rapport à une fonction $g(x)$ à variation bornée est ensuite immédiat. Si l'on représente $g(x)$ comme différence $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ de deux fonctions positives non décroissantes, on définira

$$\int f(x) dg(x) = \int f(x) dg_1(x) - \int f(x) dg_2(x)$$

en montrant que le second membre est indépendant du mode de décomposition de $g(x)$.

4. — Voici une application de la théorie précédente. Considérons une série de Fourier quelconque

$$(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (1)$$

J'ai démontré, il y a quelques années, que si

$$A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots \quad (2)$$

est la série de Fourier d'une fonction paire, la série trigonométrique

$$A_1(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + A_2(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (3)$$

est encore une série de Fourier. La théorie de l'intégrale

généralisée de Stieltjes me permet de montrer que ce résultat reste encore vrai, si l'on suppose seulement que la série (2) est la série obtenue par dérivation terme à terme de la série de Fourier

$$A_1 \sin x + \frac{1}{2} A_2 \sin 2x + \dots$$

d'une fonction impaire à variation bornée. J'ai réussi, de plus, à montrer que la sommabilité de la fonction $g(x)$ représentée par (3) est au moins celle de la fonction $f(x)$ représentée par (1). Si, par exemple, $f(x)^2$ ou $f(x) \log x$ est sommable, on peut affirmer que $g(x)^2$ ou $g(x) \log x$ l'est aussi. En particulier, lorsque les séries (1) et (2) sont les séries de Fourier de deux fonctions dont la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ puissance respectivement sont sommables, la fonction représentée par (3) a sa $r^{\text{ième}}$ puissance sommable, où $r = \frac{(1+p)(1+q)}{1-pq}$.

On pourrait aussi établir un théorème du même genre en remplaçant la série de Fourier (1) par sa série alliée

$$(a_1 \cos x - b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x - b_2 \sin 2x) + \dots$$

5. — La théorie des séries trigonométriques a fait de grands progrès depuis le commencement du XX^e siècle. La généralisation de la notion d'intégrale a permis à Lebesgue d'étendre la théorie des séries de Fourier et de supprimer nombre de restrictions ennuyeuses. Sans cette généralisation ces progrès n'étaient pas possibles, car Riemann avait conduit les mathématiciens dans un cul-de-sac par sa théorie de l'intégration et la théorie des séries de Fourier risquait à la fin du XIX^e siècle de devenir une collection de curiosités.

Qu'est-ce donc qu'une série de Fourier? La réponse de Lebesgue est formellement la même que celle de Riemann : c'est une série trigonométrique

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

dont les coefficients a_n , b_n peuvent s'exprimer au moyen

d'une fonction $f(x)$ par les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Si maintenant nous nous demandons à quelles conditions on reconnaît si une série trigonométrique est une série de Fourier, on peut répondre, quand on prend les intégrales au sens moderne, qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que la série intégrée (terme à terme)

$$(a_1 \sin x - b_1 \cos x) + \frac{1}{2}(a_2 \sin 2x - b_2 \cos 2x) + \dots$$

converge pour tout point x de l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$ vers une intégrale. On ne pourrait pas donner cette réponse, si l'on prenait les intégrales au sens de Riemann, car la série intégrée d'une série de Fourier au sens de Riemann ne converge pas nécessairement vers une intégrale au sens de Riemann.

Les nouvelles séries trigonométriques, séries dérivées (terme à terme) des séries de Fourier des fonctions à variation bornées, que j'ai introduites dans le rang des séries maniabiles, ont des propriétés qui les rapprochent beaucoup des séries de Fourier; elles s'obtiennent par les mêmes méthodes en employant l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée au lieu de l'intégration par rapport à x . Ainsi, leurs coefficients s'expriment par des intégrales de Stieltjes

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dF(x), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dF(x).$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée est analogue à celle que nous avons indiqué plus haut pour les séries de Fourier: la série intégrée terme à terme doit converger vers une fonction à variation bornée. L'emploi pratique de cette condition est assez restreint. Il n'est pas facile de reconnaître si une série

trigonométrique donnée converge vers une fonction à variation bornée ou même vers une intégrale. Aussi, avais-je déjà indiqué pour les séries de Fourier de fonctions $f(x)$, telles que $|f(x)|^{1+p}$ soit sommable, comme condition nécessaire et suffisante que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^{1+p} dx$$

soit une fonction bornée de n , $f_n(x)$ désignant la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \dots + s_n) \quad s_n = \sum_{\nu=1}^n (a^{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée est que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)| dx$$

soit une fonction bornée de n . Cette condition est d'autant plus intéressante qu'elle jette une vive lumière sur la nature des fonctions sommables et qu'elle amène à se demander si pour toute fonction sommable il n'existe pas une fonction d'ordre supérieur, soit une puissance, soit une autre fonction simple qui soit elle-même encore sommable. Envisagé à un autre point de vue, ce résultat nous donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série de Fourier d'une fonction à variation bornée.

6. — Signalons encore une des nombreuses propriétés communes aux séries de Fourier et aux séries dérivées des séries de Fourier des fonctions à variation bornée.

Une série dont les premières moyennes de Cesàro convergent vers une limite finie et déterminée est dite converger (C1). Si les termes de la série sont des fonctions de x , la convergence peut avoir lieu partout, ou seulement en certains

points x . Si les points où la convergence n'a pas lieu sont parsemés dans le continu de manière à pouvoir être tous enfermés dans un nombre fini ou infini d'intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut, la série est dite converger (C1) *presque partout*. Or Lebesgue a démontré, il y a environ dix ans, que les séries de Fourier convergent (C1) presque partout. En introduisant les moyennes de Cesàro d'ordre δ , on a généralisé le résultat de Lebesgue et démontré que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ converge (C δ) presque partout vers $f(x)$, lorsque $0 < \delta \leq 1$. J'ai démontré d'une manière analogue qu'une série trigonométrique qui est la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée $F(x)$ converge aussi (C δ) presque partout vers $F'(x)$, lorsque $0 < \delta \leq 1$.

La méthode de sommation par les moyennes de Cesàro est un cas spécial des méthodes de transformation d'une série en série convergente par multiplication de chaque terme de la série par une constante (facteur de convergence) convenable. Les recherches que j'ai faites sur ce sujet, recherches auxquelles M. G. H. Hardy a ajouté la démonstration élégante d'un point que je n'avais que prévu, m'ont conduit au théorème suivant :

Si $\sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction $F(x)$ à variation bornée, la série $\sum_2^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\log n}$ est une série de Fourier convergente presque partout. Sa somme est

$$C \int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) - F(x-t)] dg(t)$$

où C est une constante et $g(t)$ la fonction à variation bornée dont la série de Fourier est $\sum_2^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$.

7. — Je termine en indiquant un exemple de la simplification que peut apporter l'emploi de l'intégrale généralisée

de Stieltjes dans la démonstration de théorèmes déjà connus. Je prendrai pour cela le théorème suivant :

Si $F_n(x) = \int f_n(x) dx$ est une fonction bornée de n , qui converge vers une intégrale $F(x) = \int f(x) dx$, et si $g(x)$ est une fonction à variation bornée, on aura

$$\lim_{n=\infty} \int f_n(x) g(x) dx = \int f(x) g(x) dx .$$

En effet, de même que dans la théorie de l'intégration par rapport à x , il est permis dans notre théorie d'intégrer terme à terme une suite bornée. On aura donc

$$\lim_{n=\infty} \int F_n(x) dg(x) = \int F(x) dg(x) .$$

Or, $F(x)$ et $F_n(x)$ étant des fonctions continues, on peut intégrer par parties, ce qui donne

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \left[g(x) F_n(x) \right]_a^x - \int_a^x g(x) dF_n(x) \right\} = \left[F(x) g(x) \right]_a^x - \int_a^x g(x) dF(x) .$$

Les premiers termes des deux membres de cette relation sont égaux et les seconds sont des intégrales par rapport à des intégrales; par conséquent, comme on le voit facilement, on peut exprimer les seconds termes par des intégrales de Lebesgue, par exemple

$$\int_a^x g(x) dF(x) = \int_a^x g(x) f(x) dx .$$

Par suite, l'égalité des seconds termes des deux membres donne le théorème cherché.

Cette démonstration si brève n'emploie que des théorèmes fondamentaux, bien connus pour l'intégration ordinaire. Tout mathématicien peut donc en suivre le raisonnement; il lui suffit d'accepter ces théorèmes fondamentaux. La première démonstration que j'ai donnée de ce théorème remplit

au contraire plusieurs pages ; elle est délicate, elle utilise le changement de variable à la façon de Lebesgue et nécessite pour sa compréhension des connaissances étendues et une attention soutenue.

J'espère en avoir assez dit pour convaincre de la simplicité et de l'intérêt de la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée.

W. H. YOUNG (Genève).

LE BICENTENAIRE DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Le 1/14 décembre 1914, l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg a consacré une séance solennelle à la célébration du bicentenaire de la publication à Bâle, en 1713, de l'œuvre posthume de Jacques BERNOULLI : *Ars conjectandi*. On sait que la quatrième partie de cet ouvrage contient l'énoncé et la démonstration du célèbre théorème de Jacques BERNOULLI, le plus simple cas d'un ensemble de théorèmes qui constitue *la loi des grands nombres*.

La séance fut suivie par un nombreux public ; elle comprenait trois discours. Tout d'abord M. le Prof. A. VASSILIEF parla *des questions de la théorie des probabilités jusqu'au théorème de Bernoulli*. Puis M. MARKOF, membre de l'Académie, et qui avait pris l'initiative de la séance, examina *la loi des grands nombres considérés comme un ensemble de théorèmes mathématiques*. Enfin M. le Prof. A. TSCHOUPROF montra le rôle de *la loi des grands nombres dans la science contemporaine*.

Nous croyons intéresser les lecteurs de cette Revue en leur donnant un aperçu de ces trois conférences.

I

M. le Prof. A. Vassilief a donné un aperçu historique du développement de deux notions fondamentales : de la probabilité mathématique ou *a priori* et de la probabilité *a posteriori* ou empirique. Dans la « *Summa de Aritmetica Geometria Proportioni e Proportionalità* » de Paciùolo, dans les ouvrages de Tartaglia,