

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN PROBLÈME SE RÉSOUVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS
Autor: Sauter, J. / Trosset, F.
Kapitel: Résolution. — Première Méthode.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15534>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UN PROBLÈME SE RÉSOUVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS

Le présent travail, dont j'ai entrepris la rédaction, est dû à M. Trosset, ingénieur, qu'une paralysie empêche d'écrire depuis plus de 2 ans.

Il s'agit d'un problème qui semble insoluble sans l'emploi du calcul intégral. M. Trosset, grâce à une heureuse incursion dans le domaine de la géométrie à n dimensions, est arrivé à le résoudre par les mêmes méthodes qu'un simple problème d'arithmétique. Il y aurait intérêt à le faire connaître aux lecteurs de *l'Enseignement mathématique*, un tel artifice permettant de traiter par l'algèbre élémentaire tous les problèmes qu'on résolvait jusqu'ici par l'intégration d'une fonction entière.

Berne, le 23 décembre 1913.

J. SAUTER.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME.

Un tronc de pyramide à bases rectangulaires a les dimensions suivantes : longueur de la grande base, 12 cm. ; largeur, 8 cm. ; distance entre les deux bases, 12 cm. ; longueur de la petite base, 9 cm. ; largeur, 6 cm. La grande base est en or pur, la petite base en argent pur ; entre deux le corps est constitué par un alliage de ces métaux, alliage de composition variable : dans le voisinage d'un point intérieur quelconque, les volumes des parties constituantes, or et argent, sont entre eux comme les distances du point à la petite et à la grande base. On donne la densité de l'or, 19, celle de l'argent, 10, et on demande d'une part le poids de l'or contenu dans ce corps, le poids de l'argent et le poids total, d'autre part la position des centres de gravité de l'or, de l'argent et de l'ensemble.

Pour fixer les idées, on supposera les bases horizontales et on admettra que le sommet de la pyramide idéale complète se projette horizontalement sur les milieux des bases.

RÉSOLUTION. — PREMIÈRE MÉTHODE.

La fig. 1 représente le corps en perspective. Soit $A_0B_0C_0D_0A_0$ le pourtour de la grande base, $A_aB_aC_aD_aA_a$ le pourtour de la

petite. Commençons par décomposer le corps en neuf morceaux, en le coupant suivant quatre plans verticaux passant par les quatre côtés de la petite base; soient $A'', B''', B'', C''', C'', D''', D'', A'''$ les points où ces plans coupent le pourtour de la grande base et soient A', B', C', D' les projections verticales de A_a, B_a, C_a, D_a sur le plan de la grande base.

Considérons d'abord le corps central $A_a B_a C_a D_a A' B' C' D'$; c'est un parallélipède rectangle. Imaginons que dans chaque couche horizontale ab de ce corps on pousse tout l'or du côté de la ligne a , comprise dans le plan $A_a D_a A' D'$, et tout l'argent du côté de la ligne b , comprise dans le plan $B_a C_a B' C'$; où sera la ligne de dé-

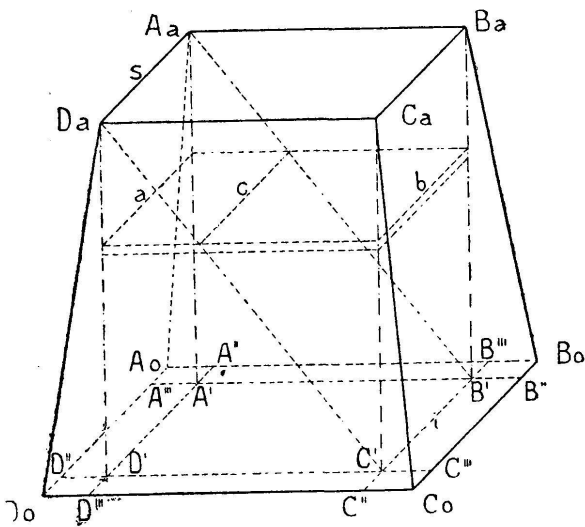


Fig. 1.

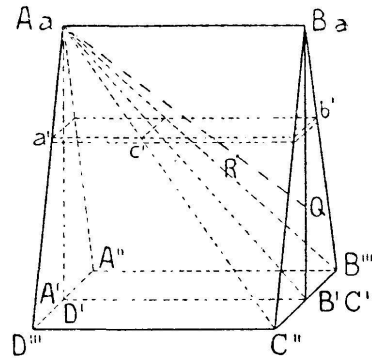


Fig. 2.

marcation c entre les deux métaux? On doit avoir $ac : bc = \nu_0 : \nu_a = as : bi$, ν_0 et ν_a étant les volumes d'or et d'argent de la couche, s et i les lignes $A_a D_a$ de la base supérieure et $B' C'$ de la base inférieure; par conséquent la ligne c ne peut être que l'intersection de la couche avec le plan diagonal si du parallélipède. Nous pouvons donc remplacer le corps central par un prisme à bases triangulaires $A_a A' B' D_a D' C'$ en or pur et un prisme à bases triangulaires $A_a B_a B' D_a C_a C'$ en argent pur; le volume de chacun de ces prismes est de $\frac{1}{2} \cdot 12 \times 9 \times 6 = 324 \text{ cm}^3$; le premier pèse $324 \times 19 = 6156 \text{ gr.}$, le second $324 \times 10 = 3240 \text{ gr.}$; le centre de gravité du premier est à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm.}$ au-dessus de la base inférieure, le centre de gravité du second à $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm.}$ au-dessus de cette base.

Passons maintenant aux morceaux $A_a A'' A' B' B''' B_a$ et $D_a D''' D' C' C'' C_a$ du corps total; ce sont deux prismes à bases triangulaires, que nous réunirons en un seul prisme, également à bases trian-

gulaires, en faisant coïncider $A_a B_a$ avec $D_a C_a$, tout en laissant $A' A'' B''' B'$ et $D' D'' C''' C'$ dans le plan primitif de la base d'or du corps total ; la fig. 2 le montre en perspective. Ce que par la pensée nous avons fait pour une couche quelconque ab du corps central — pousser tout l'or d'un côté et tout l'argent de l'autre — nous pouvons le répéter pour une couche quelconque $a'b'$ du prisme résultant que nous venons de former ; ces deux couches sont rectangulaires ; pour toutes deux le rapport des distances de la ligne de démarcation or-argent aux plans $A'' A_a D'''$, $B''' B_a C''$ sera égal au rapport des distances de la couche aux plans des bases inférieure et supérieure du corps total ; la ligne de démarcation c' se trouvera donc dans le plan diagonal $A_a C'' B'''$. Au-dessous de ce plan nous aurons une pyramide d'or à base rectangulaire, dont le volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 9 \times 2 = 72 \text{ cm}^3$, le poids de $72 \times 19 = 1368 \text{ gr.}$, et le centre de gravité à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \text{ cm.}$ au-dessus de la grande base du corps total. Au-dessus du plan $A_a C'' B'''$ restera un tétraèdre d'argent, que nous envisagerons comme une pyramide de base $C'' B_a B'''$ et de sommet A_a ; son volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 9 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36 \text{ cm}^3$, son poids de $36 \times 10 = 360 \text{ gr.}$; le centre de gravité Q de la base $C'' B_a B'''$ sera à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm.}$ au-dessus de $C'' B'''$; le centre de gravité R du tétraèdre, étant au quart de la distance de Q à A_a , sera à $4 \times \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot 12 \right) = 6 \text{ cm.}$ au-dessus de la grande base du corps total.

En répétant les mêmes raisonnements pour les deux morceaux suivants $A_a A''' A' D' D'' D_a$ et $C_a C''' C' B' B'' B_a$, après avoir fait coïncider $A_a A' D' D_a$ avec $B_a B' C' C_a$, nous arriverons à leur substituer une pyramide d'or de base $B'' C''' D'' A'''$ et de sommet A_a , et une pyramide d'argent de base $D'' C_a C'''$ et de sommet A_a . La pyramide d'or aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 3 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$, un poids de $72 \times 19 = 1368 \text{ gr.}$, et le centre de gravité à une hauteur de 3 cm. ; la pyramide d'argent aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 6 \times 3 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36 \text{ cm}^3$, un poids de $10 \times 36 = 360 \text{ gr.}$, et le centre de gravité à une hauteur de 6 cm.

Il reste encore les 4 pyramides $A_a A' A''' A_0 A''$, $B_a B' B''' B_0 B''$, $C_a C' C''' C_0 C''$, $D_a D' D''' D_0 D''$, que nous grouperons par la pensée en une pyramide unique p en les faisant glisser sur le plan commun de leurs bases jusqu'à coïncidence de $A''' A'$ avec $D'' D'$, de $B''' B'$ avec $A'' A'$, de $C''' C'$ avec $B'' B'$ et de $D''' D'$ avec $C'' C'$. Cette pyramide p , dont fig. 3 est une élévation, a sa base en or et son sommet A_a en argent ; sa densité est donc de 10 au sommet et de

19 à la distance de 12 cm. au-dessous du sommet ; quelle sera la densité à la distance de x cm. au-dessous de A_a ? Si un petit fragment f , de forme quelconque, qu'on extrairait de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a , contient v_0 cm³ d'or et v_a cm³ d'argent, on doit avoir, d'après les données du problème, $\frac{v_0}{v_a} = \frac{x}{12 - x}$, d'où $\frac{v_0}{v_a + v_0} = \frac{x}{12}$ et $\frac{v_a}{v_a + v_0} = \frac{12 - x}{12}$; le fragment pesant $19 v_0 + 10 v_a$ gr., sa densité moyenne, et par conséquent la densité de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a , sera $d = \frac{19 v_0 + 10 v_a}{v_0 + v_a} = 19 \frac{x}{12} + 10 \frac{12 - x}{12}$ soit $d = 10 + \frac{9}{12} x$. Ce résultat montre que le poids de la pyramide p est égal à la somme des poids de deux

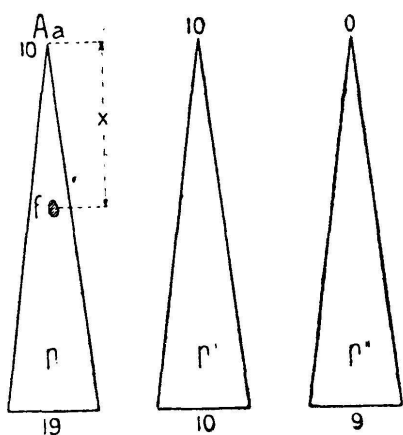


Fig. 3.

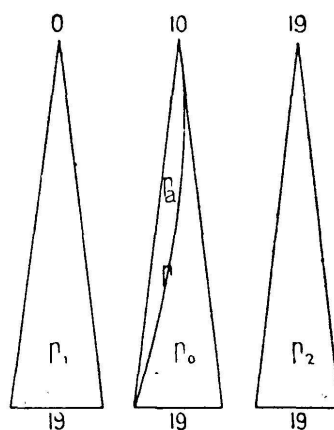


Fig. 4.

pyramides, p' , p'' , de mêmes dimensions que p , dont l'une, p' , a partout la densité 10, tandis que la densité de l'autre, p'' , varie suivant la loi $\frac{9}{12} x$ (la densité de p'' sera 0 au sommet et 9 à la base). Le volume de chacune des pyramides p , p' , p'' est de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 2 \times 3 = 24$ cm³. Le poids de la pyramide p' est donc de $10 \times 24 = 240$ gr. ; quant au poids de la pyramide p'' , nous l'obtiendrons au moyen de l'artifice suivant.

Nous comparons notre pyramide à trois dimensions p'' , dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section horizontale quelconque à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12} x$ et comme largeur $\frac{2}{12} x$, à une pyramide à 4 dimensions P'' , homogène, dont la hauteur mesure aussi 12 cm. et dont une section

quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{9}{12}x$, c'est-à-dire la valeur de la densité de p'' . La capacité de la pyramide P'' se calculera comme le produit de la base $3 \times 2 \times 9$ par le quart (à cause des 4 dimensions) de la hauteur ; on trouve $3 \times 2 \times 9 \times \frac{12}{4} = 162$ unités.

Or la capacité de la pyramide P'' doit avoir la même valeur que le poids de la pyramide p'' , donc cette dernière pèse 162 gr. Ajoutant ce résultat à 240 gr., poids de p' , nous obtenons 402 gr., comme poids de la pyramide p .

Pour trouver le volume d'or V_o et le volume d'argent V_a de p , il faut résoudre le système des deux équations

$$19V_o + 10V_a = 402$$

$$V_o + V_a = 24,$$

ce qui donne $402 = 19V_o + 10(24 - V_o) = 9V_o + 240$, $V_o = \frac{402 - 240}{9} = 18$, d'où $V_a = 24 - 18 = 6$. Le poids de l'or de p est donc de $19 \times 18 = 342$ gr. ; le poids de l'argent de $10 \times 6 = 60$ gr.

Une nouvelle difficulté surgit, pour la détermination des centres de gravité de l'or et de l'argent que renferme la pyramide p ; nous utiliserons le nouvel artifice que voici (voir fig. 4) :

Nous supposons d'abord que, sans déplacer l'or de p , nous ayons extrait tout l'argent de cette pyramide ; le fragment f considéré plus haut contiendra encore v_o cm³ d'or et présentera des vides mesurant v_a cm³, sa densité moyenne sera $\frac{19v_o}{v_o + v_a} = \frac{19x}{12}$; nous comparons cette pyramide p_1 , non homogène et pourtant sans argent, à une pyramide à 4 dimensions P_1 , homogène, dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{19x}{12}$, c'est-à-dire la densité moyenne de f . Le centre de gravité de P_1 sera au cinquième de la hauteur (à cause des 4 dimensions), à partir de la base.

Or les calculs que demande la détermination du centre de gravité de P_1 sont identiques à ceux que demande la détermination du centre de gravité de p_1 . Ce dernier se trouve donc aussi à $\frac{1}{5} \cdot 12 = 2,4$ cm. au-dessus de la base.

Ayant le centre de gravité de l'or de p , nous pouvons passer au centre de gravité de l'argent de p au moyen d'un troisième artifice :

Nous supposons cet argent transformé en or, ce qui n'en déplace pas le centre de gravité. Pour fixer les idées, nous admettons qu'avant la transformation on ait poussé dans chaque tranche horizontale tout l'argent d'un côté et tout l'or de l'autre, parallèlement au plan de la fig. 4; la pyramide p aura été décomposée en deux corps, p_0, p_a , le premier tout en or, le second tout en argent, qui se touchent suivant une surface courbe dont la forme exacte ne nous intéresse pas; ce transport n'aura pas changé la distance des centres de gravité de l'or et de l'argent à la base de la pyramide p .

Après la transformation du corps p_a en or, la pyramide p deviendra une pyramide homogène p_2 , dont le centre de gravité est à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ cm. au-dessus de la base et qui mesure 24 cm³, tandis que sa partie p_0 a son centre de gravité à $2,4$ cm. et mesure $v_0 = 18$ cm³. Or $3 \times 24 = 72$ et $2,4 \times 18 = 43,2$; la différence $72 - 43,2 = 28,8$ doit être égale au produit de $v_a = 6$, volume de la partie p_a , par la distance cherchée du centre de gravité de p_a à la base de p . Cette distance est donc $\frac{28,8}{6} = 4,8$ cm.

Récapitulons : Nous avons trouvé pour l'or des différentes portions du corps donné les poids et les altitudes de centre de gravité qui suivent (par altitudes nous entendrons la hauteur au-dessus de la base inférieure du corps total) :

corps central :	6156 gr.,	4 cm.,	produit	24624
1 ^{er} prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm.,	produit	4104
2 ^d prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm.,	produit	4104
pyramide p :	342 gr.,	2,4 cm.,	produit	820,8
Or total :	9234 gr.,			33652,8

divisant la somme des produits de droite par le poids total de l'or, on trouve comme altitude du centre de gravité de l'or $\frac{33652,8}{9234} = 3,6444$ cm.; cette altitude et le fait que le centre de gravité doit, pour raison de symétrie, se trouver sur la verticale passant par les centres des bases, déterminent la position même du centre de gravité de l'or. Le problème est résolu pour l'or.

Quant à l'argent des différentes portions, nous avons obtenu comme poids et altitudes des centres de gravité :

corps central :	3240 gr.,	8 cm.,	produit	25920
1 ^{er} prisme combiné :	360 gr.,	6 cm.,	produit	2160
2 ^d prisme combiné :	360 gr.,	6 cm.,	produit	2160
pyramide p :	60 gr.,	4,8 cm.,	produit	288
Argent total :	4020 gr.,			30528

le centre de gravité de l'argent sera sur la même verticale que celui de l'or, mais à une altitude de $\frac{30528}{4020} = 7,5940$ cm. Le problème est aussi résolu pour l'argent.

Le poids total du corps sera de $9234 + 4020 = 13254$ gr. Son centre de gravité est situé sur la verticale qui joint les centres des bases, à une altitude qu'on obtient en divisant par 13254 la somme $33652,8 + 30528 = 64180,8$; l'altitude est de 4,8424. Le problème est complètement résolu.

DEUXIÈME MÉTHODE.

Nous supposons établi que la densité du corps à la distance x au-dessous de sa petite base varie uniformément avec x , selon la formule $d = 10 + \frac{9}{12}x$. Nous avons démontré cette propriété pour la pyramide qui avait été désignée par p ; toutefois la formule est valable dans toute l'étendue du corps total, puisque la composition de l'alliage dépend seulement de x , d'après les données mêmes du problème.

Au lieu de couper le corps en morceaux, essayons de le compléter en prolongeant les arêtes obliques $A_0A_a, B_0B_a, C_0C_a, D_0D_a$ jusqu'à leur point d'intersection z (voir fig. 5) et en supposant que la densité varie encore suivant la loi $d = 10 + \frac{9}{12}x$ au-dessus de la petite base, où x prendra des valeurs négatives. Nous désignerons par c le corps donné, par c' la pyramide additionnelle qui le surmonte, et par $C = c + c'$ le corps ainsi complété.

Pour trouver la hauteur h' de z au-dessus de la petite base, nous utilisons la proportion $\frac{h'}{h+h'} = \frac{C_aD_a}{C_0D_0} = \frac{9}{12}$, que démontre la figure; h est la hauteur du corps donné, 12 cm.; nous tirons de cette proportion $\frac{h'}{h} = \frac{9}{12-9} = 3$ soit $h' = 3h = 36$ cm.

Pour trouver la densité en z , il nous faut faire, dans la formule pour d , $x = -36$, et nous trouvons le résultat étrange $d = 10 - \frac{9}{12}36 = -17$, densité négative.

Mais ceci nous apprend qu'il suffit d'augmenter partout de 17 la densité du corps C pour en faire un corps C_1 assimilable à une pyramide homogène Q_1 à 4 dimensions, comme nous l'avons fait pour la pyramide p'' .

Désignant par y la distance d'un point quelconque au sommet z , en aura $y = x + h' = x + 36$ et pour la densité d_1 en un tel point de C_1 $d_1 = 17 + d = 27 + \frac{9}{12}(y - 36) = \frac{9}{12}y$.