Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1914)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉGALITÉS MULTIPLES DE G. TARRY
Autor: Aubry, A.
Kapitel: Note I. — Egalités doubles.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15523

D'ailleurs, pour qu'une égalité entre les n premiers entiers puisse avoir lieu, il faut que n soit non seulement pair, mais encore multiple de 4, car la somme des $2m$ premiers entiers est impaire en même temps que m.

Théorème III. — Supposons, dans le lemme IV, que $a, \ldots\ \alpha, \ldots$ désignent les $4n$, les $8n$, les $16n, \ldots$ premiers entiers ; en faisant successivement $h = 4n,\ 8n,\ 16n, \ldots$ on verra, à cause du lemme V, que les $4(2k+1)$, les $8(2k+1), \ldots$ premiers entiers donnent des égalités respectivement doubles, triples, quadruples, ... Par conséquent, *les* $2^m(2k+1)$ *premiers entiers peuvent se grouper en deux suites formant une égalité* m$^{\text{uple}}$.

Note I. — Egalités doubles.

Théorème I. — *Une égalité double doit avoir plus de deux termes dans chaque membre.*

Théorème II. — *On ne saurait avoir* $x + x + x \overset{2}{=} y + z + w$.

Théorème III. — *Les trois termes ne sauraient être à la fois en progression arithmétique ou géométrique dans les deux membres.*

Problème I. Résoudre $x \overset{2}{=} y' + z' + w'$. Changeons y', z' et w' en $x - y$, $y - z$ et z ; la question revient à la résolution de $x \overset{2}{=} (x-y) + (y-z) + z$ ou simplement de $x^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2$, d'où on tire

$$x = y - z + \frac{z^2}{y} .$$

Posons en conséquence $z = tv$, $y = ut$, u et v étant premiers entre eux ; il viendra

$$x = ut - vt + \frac{v^2 t}{u} \qquad \text{d'où} \qquad t = su$$

et par suite

$$x = (u^2 - v + v^2)s \ , \qquad y = u^2 s \ , \qquad z = uvs \ ;$$

d'où, en négligeant le facteur commun s, la formule

$$(u^2 - uv + v^2) \overset{2}{=} v(v-u) - u(v-u) + uv \ ,$$

qui donne une infinité de solutions, u et v restant arbitraires.

Cor. L'égalité proposée peut s'écrire $0 + 0 + x \overset{2}{=} y' + z' + w'$, ou, en ajoutant $-x$ à chaque terme, $-x - x \overset{2}{=} (y-x) + (z-x) + (w-x)$, ce qui fournit cette autre relation

$$(uv - u^2 - v^2) + (uv - u^2 - v^2) \overset{2}{=} u^2 + v^2 + (u-v)^2 .$$

Problème II. *Résoudre* $-x + x \overset{2}{=} y' + z' - w'$. Ecrivons ainsi cette égalité

$$-x + x \overset{2}{=} (x - y - z) + (-x - y + z) + (2y)$$

ou $$x^2 + x^2 = (x - y - z)^2 + (-x - y + z)^2 + (2y)^2 ,$$

d'où, en simplifiant et continuant comme au précédent problème,

$$t = sv , \qquad y = su , \qquad z = sv^2 , \qquad 2x = 3su^2 + sv^2 ,$$

et, en négligeant le coefficient s,

$$-(3u^2 + v^2) + (3u^2 + v^2) \overset{2}{=} (3u^2 - v^2 - 2uv) + (-3u^2 + v^2 - 2uv) + 4uv .$$

Cor. I. L'égalité proposée peut encore s'écrire $-x + x \overset{2}{=} -y' - z' - w'$: elle a donc toujours au moins deux solutions. Ainsi $-7 + 7 \overset{2}{=} -3 - 5 + 8$ peut encore s'écrire $-7 + 7 \overset{2}{=} 3 + 5 - 8$, ou bien, en ajoutant 7 partout,

$$7 + 14 \overset{2}{=} 2 + 4 + 15 \overset{2}{=} -1 + 10 + 12 .$$

II. Ajoutant x à tous les termes de l'égalité ainsi complétée $0 - x + x \overset{2}{=} y' + z' + w'$, on trouve $x + 2x \overset{2}{=} y'' + z'' + w''$: on a donc en même temps la solution de cette nouvelle égalité.

Théorème IV. — Posons

$$a^2 + b^2 = (a - fh)^2 + (b + gh)^2 + (fh - gh)^2 ,$$

il viendra

$$(\alpha) \qquad fa - gb = (f^2 + g^2 - fg)h .$$

Donc *si* a *et* b *sont liés par la relation* (α) *on aura*

$$a + b \overset{2}{=} (a - fh) + (b + gh) + (fh - bh) .$$

Ainsi, les suppositions $f = 2$, $g = 1$; $f = 1$, $g = -1$; $f = 3$, $g = 1$; $f = 3$, $g = 2$; ... donnent ces théorèmes :

si $2a - b = 3h$, on aura : $a + b \overset{2}{=} (a - 2h) + (b + h) + h$.

si $a + b = 3h$, on aura : $a + b \overset{2}{=} (a - h) + (b - h) + 2h$;

si $3a - b = 7h$, on aura : $a + b \overset{2}{=} (a - 3h) + (b + h) + 2h$.

si $3a - 2b = 7h$, on aura : $a + b \overset{2}{=} (a - 3h) + (b + 2h) + h$.

. . . .

Problème III. *Formule générale de l'égalité double.* Posons

$$x + y \overset{2}{=} (y + t) + z + w \ ;$$

on aura

$$x^2 = t^2 + z^2 + w^2 + 2tz + 2tw + 2zw = 2yt + t^2 + z^2 + w^2$$

d'où

$$tz + tw + zw = yt$$

ce qui demande qu'on puisse poser $zw = tu$. Ecrivons en conséquence

$$z = ab \ , \qquad w = cd \ , \qquad t = bd \ , \qquad u = ac \ ,$$

il viendra

$$(\beta) \quad (ab + bd + cd) + (ab + ac + cd) \overset{2}{=} (ab + ac + bd + cd) + ab + cd \ .$$

Cor. I. On peut tirer de là une infinité d'égalités doubles. Par exemple posons $c = b$ et ajoutons aux six termes — compris le terme zéro — le nombre $hb - ab - bd$; il viendra la formule

$$(h - a - d) + (h + a) + (h + d) \overset{2}{=} (h + a + d) + (h - a) + (h - d)$$

qui se simplifie, tout en restant symétrique en y faisant $d = 2a$.

II. *Résolution de* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$. Assimilant à (β), on voit qu'on a à résoudre

$$A^2 + B^2 = (A + ac)^2 + (B - ac - cd)^2 + (cd)^2$$

d'où

$$(\gamma) \qquad c = \frac{Ba - Aa + Bd}{a^2 + d^2 + ad} \ .$$

Ainsi soit $A = 17$, $B = 3$; on voit, après quelques tâtonnements, que c est entier pour $a = 2$, $d = 3$. On trouve en conséquence

$$c = -1 \ , \qquad b = \frac{A - cd}{a + d} = 4$$

et par suite l'égalité double cherchée $3 + 17 \overset{2}{=} -3 + 8 + 15$.

Le problème a autant de solutions qu'il y a de valeurs de a et de d qui rendent entière la valeur du second membre de (γ).

On remarquera que (γ) fournit les théorèmes IV.

III. *Pour que l'équation* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$ *soit résoluble, il faut et il suffit que le nombre* $A^2 + B^2 - AB$, *s'il n'est pas divisible par* 3, *ait au moins deux facteurs premiers de la forme* $6h + 1$ [1].

[1] Ce théorème et le suivant m'ont été communiqués sans démonstration par M. G. Tarry.

Si cette équation est résoluble, on doit pouvoir écrire :

$$A = ab + bd + cd \ , \qquad B = ab + ac + cd \ .$$

Or on a dans ce cas :

$$A^2 + B^2 - AB = (a^2 + d^2 + ad)(b^2 + c^2 + bc) \ .$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est que le nombre $A^2 + B^2 - AB$ puisse se décomposer en deux facteurs de forme $x^2 + y^2 + xy$, expressson qui ne peut avoir pour facteurs que 3 ou des nombres premiers de forme $6h + 1$.

Si le nombre $A^2 + B^2 - AB = (A + B)^2 - 3AB$ est divisible par 3, il en est de même de $A + B$; or ce cas a été traité plus haut. (Théorème IV.)

IV. *Supposons qu'on puisse écrire* $A^2 + B^2 - AB = X^2 + Y^2 - XY$; *en posant* $x = 2X - Y$, $y = 2Y - X$, *on aura :*

$$(\delta) \qquad A + B \stackrel{2}{=} \frac{A + B \pm x}{3} + \frac{A + B \pm y}{3} + \frac{A + B \mp x \mp y}{3} \ .$$

En effet, cette relation revient à

$$(\varepsilon) \qquad 3(A^2 + B^2 - AB) = x^2 + y^2 + xy$$

ou bien à

$$A^2 + B^2 - AB = \left(\frac{2x + y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y + x}{3}\right)^3 - \frac{2x + y}{3}\,\frac{2y + x}{3} \ .$$

(ε) donne $(x - y)^2 + 3xy \equiv 0 \pmod 3$, d'où $x \equiv y$ et $2x + y \equiv 0$. D'ailleurs on a :

$$(A + B)^2 \equiv (X + Y)^2 \equiv (2X - Y)^2 \equiv x^2 \equiv y^2 \ .$$

Ainsi si $A + C$ est un non-multiple de 3, il en est de même de x et de y, et on prendra, pour les signes de x et de y, ceux qui donnent pour (δ) des nombres entiers.

V. *L'équation* $x + y = z + A + B$ *est toujours soluble, et elle a même, en général, quatre solutions.* On n'a, pour s'en assurer, qu'à changer dans (β) a et b, 1° en $\pm a$ et $\pm b$, 2° en $\pm b$ et $\pm a$.

Note II. — Carrés panmagiques de module $4n$.

Soit $n = 3$. Considérons, par exemple, l'égalité entre les 12 premiers entiers

$$1 + 11 + 3 + 9 + 8 + 7 = 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6$$