Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI DE CERTAINES MATRICES DE FORMES DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

Autor: Godeaux, Lucien

Kapitel: § 1. — Matrices fonctionnelles.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16311

§ 1. — *Matrices fonctionnelles.*

1. — Désignons par $(x_0, x_1, x_2, \ldots x_r)$, $(y_0, y_1, \ldots y_r)$, $(z_0, z_1, \ldots z_r)$ les coordonnées projectives homogènes respectivement de trois points X, Y, Z d'un espace linéaire S_r, à r dimensions et représentons par (λ, μ, ν) une fonction rationnelle, entière et homogène par rapport à chacune de ces séries de variables, de degré λ en (x), μ en (y), ν en (z).

Considérons la matrice à sept lignes et six colonnes

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & (\lambda_2, \mu_2, \nu_2) & \ldots & (\lambda_6, \mu_6, \nu_6) \\ (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & — & \ldots & — \\ — & — & \ldots & — \\ — & — & \ldots & — \\ — & — & \ldots & — \\ — & — & \ldots & — \\ (\lambda_1, \mu_1, \nu_1) & — & \ldots & (\lambda_6, \mu_6, \nu_6) \end{matrix} \right\| = 0$$

et supposons que cette matrice ne change pas de forme lorsque l'on substitue à x_i, y_i, z_i, des combinaisons linéaires $\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i$, $\alpha' x_i + \beta' y_i + \gamma' z_i$, $\alpha'' x_i + \beta'' y_i + \gamma'' z_i$. Les équations (1) sont alors vérifiées pour trois points arbitraires (distincts) du plan XYZ. On peut donc dire que ces équations représentent un système de plans. Ce système est de dimensions $3(r-2) - 2 = 3r - 8$; c'est, suivant la terminologie de S. Kantor, un ∞^{3r-8} — complexe de plans.

2. — Faisons $r = 3$. Les équations (1) représentent alors une développable de S_3 dont nous allons rechercher la classe, c'est-à-dire le nombre de ses plans passant par un point. Pour cela, nous pourrions opérer de la manière suivante : Immobilisons le point X et faisons parcourir aux points Y, Z deux droites gauches. Mais alors, nous devrons éliminer les solutions pour lesquelles X, Y, Z sont en ligne droite, ce qui présente de sérieuses difficultés. Il est donc préférable de procéder autrement.

Faisons, dans les équations (1), $r = 4$. Nous avons alors, dans S_4, un ∞^4 — complexe de plans. Par deux points quelconques passent des plans de ce ∞^4 — complexe en nombre fini ξ. De même, il y a un nombre fini ζ de plans de cet ∞^4 — complexe passant par un point et s'appuyant sur deux droites, ces droites et ce point n'etant pas dans un même S_3.

La connaissance des nombres ξ, ζ nous fournit la classe de la développable de S_3. Considérons en effet un point P et deux droites d_1, d_2 de S_4. Lorsque d_1 et d_2 ne se rencontrent pas et que le point P ne se trouve pas dans le S_3 déterminé par d_1, d_2, faisons varier d_1, d_2 jusqu'à ce que ces droites se rencontrent en un point P'. D'après le principe de la conservation du nombre, le nombre ζ des plans du ∞^4 — complexe passant par P et s'appuyant sur d_1, d_2, restera le même, car il ne devient pas infini[1]. Par conséquent, le nombre ζ est égal au nombre ξ des plans du ∞^4 — complexe passant par P, P' augmenté du nombre χ des plans passant par P et s'appuyant sur d_1, d_2 en des points distincts. Mais d_1, d_2 et P sont actuellement dans un même S_3 et les plans du ∞^4 — complexe passant par P et s'appuyant en des points distincts sur d_1, d_2 ayant trois points communs avec cet S_3 y sont contenus tout entier. Par conséquent, χ est la classe de la développable lieu des plans satisfaisant aux équations (1) pour $r = 4$ et situés dans un S_3. On peut choisir P, d_1, d_2 de manière que cet S_3 soit donné par $x_4 = 0$. On voit ainsi que χ est bien la classe cherchée.

3. — *Calcul de* ξ. — Pour calculer ξ, donnons à X, Y des positions fixes en dehors du plan $x_3 = x_4 = 0$ et faisons parcourir ce plan au point Z. En d'autres termes, dans la matrice (1) donnons aux (x), (y) des valeurs fixes, telles que $x_3, x_4 \neq 0$, $y_3, y_4 \neq 0$ et faisons $z_3 = z_4 = 0$. Nous obtenons une matrice à trois variables homogènes (z_0, z_1, z_2) qui s'annule, d'après une formule de M. Stuyvaert[2], pour

$$\sum_{i,k=1}^{6} \nu_i \nu_k \qquad (i \leqq k)$$

systèmes de valeurs de ces variables. On a donc

$$\xi = \sum_{i,k=1}^{6} \nu_i \nu_k \qquad (i \leqq k) .$$

Observation. — Les points X, Y, Z jouant des rôles symétriques, on a également

$$\xi = \Sigma \lambda_i \lambda_k , \qquad \xi = \Sigma \mu_i \mu_k \qquad (i \leqq k) .$$

Une condition pour que la matrice (1) jouisse de la propriété indiquée est donc

$$\Sigma \lambda_i \lambda_k = \Sigma \mu_i \mu_k = \Sigma \nu_i \nu_k \qquad (i, k = 1, \ldots, 6 ; \quad i \leqq k) .$$

4. — *Calcul de* ζ. — Pour calculer ζ, donnons à X une position fixe et faisons parcourir au point Y la droite $y_0 = y_1 = y_2 = 0$,

---

[1] La condition imposée aux plans du ∞^4 — complexes initialement se décompose en deux conditions de même dimension. Voir F. Severi, *Sul principio della conservazione del numero*. Rend. Circ. Palermo, 1912.

[2] *Cinq Etudes de Géométrie Analytique* (p. 10). Gand, Van Gœthem, 1908.

au point Z la droite $z_2 = z_3 = z_4 = 0$. Supposons de plus que le point X ait été choisi de manière que x_2 soit différent de zéro. Alors, les points X, Y, Z sont toujours distincts et ne sont jamais en ligne droite.

Posons

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{y_3}{y_4}, \qquad \frac{u_2}{u_3} = \frac{z_0}{z_1},$$

et substituons dans la matrice (1). Nous obtenons une matrice à trois variables (u_1, u_2, u_3), homogènes, qui admet, d'après la formule de M. Stuyvaert déjà invoquée,

$$\Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6, \quad i \leqq k)$$

solutions. Mais parmi ces solutions, il peut y en avoir pour lesquelles on ait soit $u_1 = u_3 = 0$, soit $u_2 = u_3 = 0$. Ces solutions donnent respectivement $y_3 = y_4 = 0$, $z_0 = z_1 = 0$, ce qui est absurde. Remarquons que le $i^{\text{ème}}$ terme d'une ligne est de degré μ_i par rapport aux variables (u_1, u_3). On trouve donc $\xi = \Sigma\mu_i\mu_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6, i \leqq k)$ solutions pour lesquelles $u_1 = u_3 = 0$. De même, on trouve ξ solutions pour lesquelles $u_2 = u_3 = 0$. Par conséquent, on a

$$\zeta = \Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) - 2\xi \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6; \quad i \leqq k).$$

Par suite

$$\zeta = \Sigma(\mu_i + \nu_i)(\mu_k + \nu_k) - \Sigma\mu_i\mu_k - \Sigma\nu_i\nu_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6; \ i \leqq k)$$

$$\zeta = \Sigma\mu_i\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i = \Sigma\mu_i\Sigma\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6),$$

5. — *Nombre χ.* — Nous avons trouvé plus haut que la développable représentée par la matrice (1) dans laquelle on a fait $r = 3$, a la classe $\chi = \zeta - \xi$. On a donc

$$\chi = \sum_{i, k = k}^{6} \mu_i\nu_k + \sum_{i=1}^{6} \mu_i\nu_i - \xi.$$

Observation. — Remarquons que pour que la matrice (1) jouisse de la propriété indiquée, on doit arriver au même nombre ζ en intervertissant les rôles des points X, Y, Z. On doit donc avoir

$$\Sigma\mu_i\nu_k + \Sigma\mu_i\nu_i = \Sigma\nu_i\lambda_k + \Sigma\nu_i\lambda_i = \Sigma\lambda_i\mu_k + \Sigma\lambda_i\mu_i.$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, 6).$$

6. — Considérons le déterminant obtenu en supprimant la dernière ligne de la matrice (1) et en y faisant $r = 3$. Ce déterminant,

égalé à zéro, représente une série ∞^2 de plans enveloppant une certaine surface. Pour trouver la classe de cette surface, on immobilise X, Y et on fait $z_2 = z_3 = 0$. On trouve alors que cette classe est égale à $\sum_1^6 \nu_i$. On doit d'ailleurs avoir

$$\Sigma\lambda_i = \Sigma\mu_i = \Sigma\nu_i \,.$$

§ 2. — *Lieu des plans sur lesquels les quadriques d'un système ∞^6, linéaire, découpent ∞^4 coniques.*

7. — Considérons, dans un S_3, sept quadriques linéairement indépendantes dont nous écrirons les équations sous la forme symbolique

$$a_x^2 = 0\,,\quad b_x^2 = 0\,,\quad c_x^2 = 0\,,\quad d_x^2 = 0\,,\quad f_x^2 = 0\,,\quad g_x^2 = 0\,,\quad h_x^2 = 0\,.$$

Supposons que ces quadriques n'aient, six à six, aucun point commun.

Un plan déterminé par trois points X, Y, Z rencontre une de ces quadriques, la première par exemple, en une conique dont le point générique, de coordonnées $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0, \ldots \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3)$, vérifie l'équation

$$\alpha^2 a_x^2 + \beta^2 a_y^2 + \gamma^2 a_z^2 + 2\alpha\beta a_x a_y + 2\beta\gamma a_y a_z + 2\gamma\alpha a_z a_x = 0\,.$$

Pour que les sept coniques déterminées par les sept quadriques données appartiennent à un même système ∞^4, linéaire, on doit avoir

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_x^2 & a_y^2 & a_z^2 & a_x a_y & a_y a_z & a_z a_x \\ b_x^2 & b_y^2 & b_z^2 & b_x b_y & b_y b_z & b_z b_x \\ c_x^2 & - & - & - & - & - \\ d_x^2 & - & - & - & - & - \\ f_x^2 & - & - & - & - & - \\ g_x^2 & - & - & - & - & - \\ h_x^2 & - & - & - & - & h_z h_x \end{array} \right\| = 0\,. \qquad (2)$$

Ces plans enveloppent donc une développable dont la classe χ est donnée par les formules générales du § 1. Dans ces formules, nous devons faire $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 1$,