

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DUALISTIQUES DES TRIANGLES  
**Autor:** Crelier, L.  
**Kapitel:** § II. — Groupement des involutions par rapport à un triangle fondamental et un point ou une droite auxiliaires.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16324>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

§ II. — Groupement des involutions par rapport à un triangle fondamental et un point ou une droite auxiliaires.

11. Nous admettons que le triangle auxiliaire  $A_1B_1C_1$  seréduit à trois droites  $a_1, b_1, c_1$  passant par un même point  $P$ . Les ob-

12. Le triangle auxiliaire est formé par les trois sommets  $A, B$  et  $C$  appartenant à une même droite  $p$ . Les observations

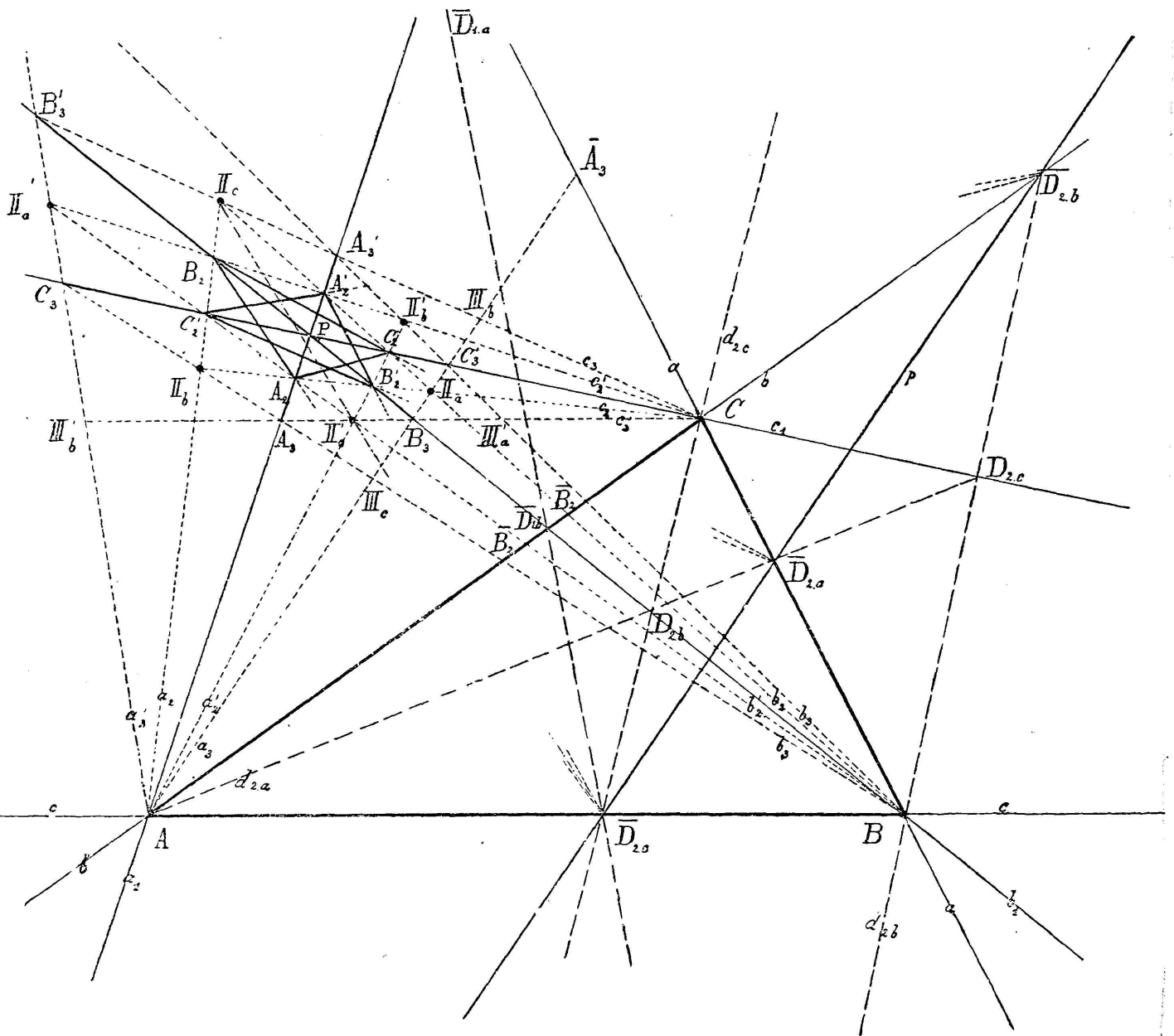


Fig. 2.

servations précédentes subsisteront et ces droites seront toujours les axes d'homologie. (Fig. 2).

Les rayons conjugués de  $a_1$ ,

précédentes seront encore vraies et les points  $A, B, C$  seront toujours les centres d'homologie. (Fig. 3).

Les points conjugués de  $A, B,$

$b_1, c_1$  sont confondus avec ces mêmes droites ; ce sont les premiers rayons doubles des involutions en  $A, B, C$ . Les autres rayons doubles passent par les points harmoniquement asso-

$C$ , soient  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$  sont confondus avec ces points ;  $A, B, C$  sont donc les premiers points doubles des involutions. Les autres seront les conjugués harmoniques des précédents, par

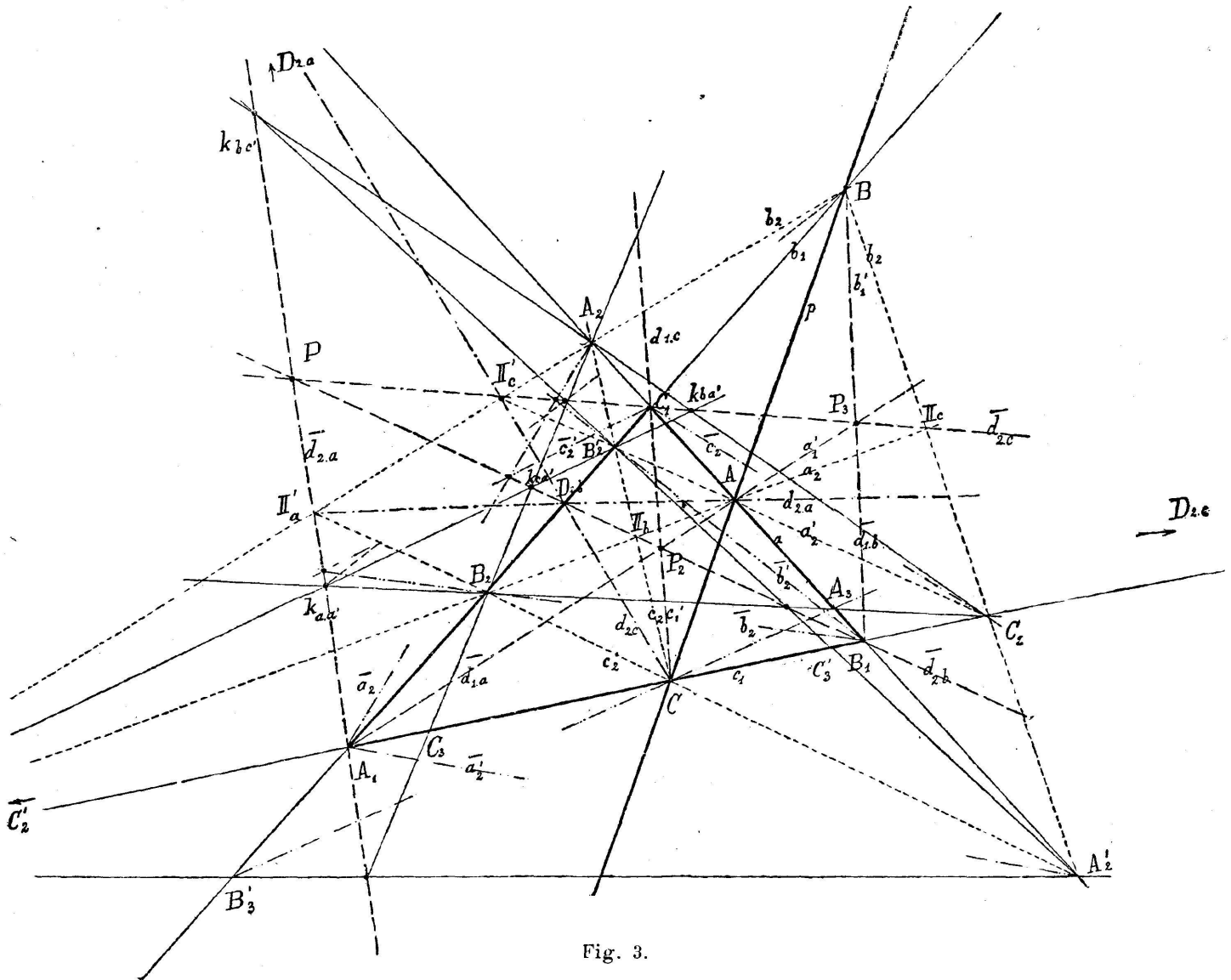


Fig. 3.

ciés de  $P$ , soient  $P_1, P_2, P_3$ , et en outre par les conjugués harmoniques de  $\bar{A}_1 = \bar{D}_{1.a}, \bar{B}_1 = \bar{D}_{1.b}, \bar{C}_1 = \bar{D}_{1.c}$  par rapport aux sommets respectifs  $A, B, C$ . Nous désignerons ces points

rapport aux sommets du triangle  $A_1, B_1, C_1$ . Ce sont les pieds des céviennes du pôle trilinéaire  $P$  de  $p$ .

par  $\overline{D}_{2.a}$ ,  $\overline{D}_{2.b}$ ,  $\overline{D}_{2.c}$ ; ils seront en ligne droite, sur la polaire trilinéaire de P.

Le théorème général relatif aux courbes engendrées subsiste avec la remarque suivante : *le point auxiliaire P est un point commun des trois courbes  $C_{1.a}$ ,  $C_{1.b}$  et  $C_{1.c}$ .*

En effet, les rayons AP et BP sont conjugués homologues ou homographiques. Le point P est donc un point de la courbe  $C_{1.c}$ . Il serait de la même manière un point de chacune des autres courbes.

Les autres points de coupe des droites  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  avec les coniques sont les points de coupe des seconds rayons doubles conjugués des faisceaux involutifs en A, B, C, soient  $D_{2.a}$ ,  $D_{2.b}$  et  $D_{2.c}$ .

Les ponctuelles involutives sur les côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ou  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  sont analogues à celles du cas général.

A ce sujet, considérons l'involution de rayons en A et coupons-la par la droite  $a$ . Nous obtenons l'involution de points BC,  $\overline{A}_2\overline{A}'_2$ , ...  $\overline{D}_{1.a}$  et  $\overline{D}_{2.a}$ , ces derniers sont les points doubles.

En coupant ce même faisceau par une céviennne de P,  $c_1$  ou  $b_1$ , nous avons les ponctuelles involutives  $C\overline{C}_1$ ,  $C_2C'_2$  ...  $D_{1.c}$  et  $D_{2.c}$  ou  $B\overline{B}_1$ ,  $B_2B'_2$ , ...  $D_{1.b}$  et  $D_{2.b}$ ; les points  $P = D_{1.c}$ ,  $D_{2.c}$  et  $P = D_{1.b}$ ,  $D_{2.b}$  sont les points doubles.

$$(D_{2.c} = P_3; D_{2.b} = P_2) .$$

Les ponctuelles sur les côtés

Le théorème général relatif aux courbes enveloppées subsiste, mais en observant que *la droite p est une tangente commune des trois courbes  $K_{1.a}$ ,  $K_{1.b}$ ,  $K_{1.c}$ .*

En effet, les points A et B sont conjugués homologues et homographiques, ils déterminent une tangente de la courbe  $K_{1.c}$ , donc  $p$  est une tangente de  $K_{1.c}$ . Cette droite sera de la même manière une tangente de chacune des autres courbes.

La seconde tangente de  $K_{1.c}$  par C sera la droite  $CD_{2.a}$  harmoniquement associée de  $p$ , elle passe par les seconds points doubles  $D_{2.a}$  et  $D_{2.b}$  des involutions sur  $a_1$  et  $b_1$ . Il en est de même en A et B.

Les faisceaux involutifs en  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  ou en A, B, C sont analogues à ceux du cas général.

L'involution sur  $a_1$  jointe avec le sommet  $A_1$  nous donne le faisceau  $b_1c_1$ ,  $\overline{a}_2\overline{a}'_2$ , ...  $\overline{d}_{1.a}\overline{d}_{2.a}$ . Ces derniers sont les rayons doubles passant respectivement par A et  $D_{2.a}$ .

En joignant la même involution avec B ou C sur  $p$ , nous obtenons les faisceaux involutifs :  $b_1b'_1$ ,  $b_2b'_2$ , ...  $d_{1.b}d_{2.b}$  ou  $c_1c'_1$ ,  $c_2c'_2$ , ...  $d_{1.c}d_{2.c}$ . Les rayons doubles donnent lieu aux relations suivantes :  $d_{1.b} = p$ ,  $d_{2.b} = D_{2.a} \cdot D_{2.c}$ ,  $d_{1.c} = p$ , et  $d_{2.c} = D_{2.a} \cdot D_{2.b}$ .

Les faisceaux involutifs en  $A_1$ ,



$a, b, c$  du triangle fondamental sont semi-homologiques et homographiques. Le centre d'homologie pour celles sur  $a$  et  $b$ , par exemple, est  $\bar{D}_{2,c}$ , c'est le conjugué harmonique de  $\bar{C}_1$  par rapport à  $A$  et  $B$ .

Nous obtenons  $\bar{D}_{2,c}$  comme point de coupe des lignes de jonction des points doubles conjugués.

Les ponctuelles sur  $a$  et  $b$  engendrent une nouvelle conique  $K_{2,c}$  tangente de  $AC$  en  $A$  et de  $BC$  en  $B$ .

Les ponctuelles considérées deux à deux sur les côtés  $abc$ , engendrent, comme dans le cas général, trois coniques,  $K_{2,a}$ ,  $K_{2,b}$  et  $K_{2,c}$ , analogues à  $K_{2,c}$ .

Examinons maintenant les ponctuelles sur les côtés du triangle auxiliaire: soient celles sur  $b_1$  et  $c_1$ ; elles ont deux points doubles homologues confondus en  $P$ ; *elles sont doublement homologiques*; la courbe enveloppée se ramène à quatre points,  $P$  comme point double,  $A$  comme centre d'homologie et enfin un quatrième point  $\bar{D}_{2,a}$ . Celui-ci sera sur les lignes de jonction des points conjugués correspondants de deux paires quelconques des involutions. La ligne de jonction des seconds points doubles peut servir comme première de ces lignes.

Les trois ponctuelles considérées deux à deux engendrent chaque fois quatre points analogues aux précédents.

13. Comme précédemment, nous aurons une involution de triangles avec des éléments dou-

$B_1$  et  $C_1$  considérés deux à deux sont semi-homologiques et homographiques. L'axe d'homologie relatif aux faisceaux en  $A_1$  et  $B_1$  est la droite  $C_1P$  conjuguée harmonique de  $c'_1$  par rapport à  $a_1$  et  $b_1$ .

Nous obtenons  $C_1P = PP_3$  comme ligne de jonction des points de coupe  $P$  et  $P_3$  des rayons doubles conjugués.

Les faisceaux en  $A_1$  et  $B_1$  engendrent une nouvelle conique  $C_{2,c}$ , tangente de  $A_1C_1$  en  $A_1$  et de  $B_1C_1$  en  $B_1$ .

Les faisceaux considérés deux à deux dans les sommets du triangle fondamental  $A_1B_1C_1$  engendrent, comme dans le cas général, trois coniques  $C_{2,a}$ ,  $C_{2,b}$  et  $C_{2,c}$ , analogues à  $C_{2,c}$ .

Passons maintenant aux faisceaux dans les sommets  $A, B, C$  du triangle auxiliaire: soient ceux en  $B$  et  $C$ ; ils ont deux rayons doubles homologues confondus en  $p$ ; *ils sont doublement homologiques*; la courbe engendrée se ramène à quatre droites,  $p$  comme droite double,  $C_1P$  comme axe d'homologie et enfin une quatrième droite  $PD_{2,a}$ . Celle-ci est la ligne de jonction des points de coupe des rayons conjugués correspondants de deux paires quelconques des involutions. Le point de coupe des seconds rayons doubles peut servir comme premier point.

Les trois faisceaux considérés deux à deux engendrent chaque fois quatre droites analogues aux précédentes.

14. Nous aurons aussi, comme dans le cas général, une involution de triangles avec éléments

bles. Dans le cas général ceux-ci peuvent être imaginaires, tandis que dans notre cas particulier ces éléments doubles seront toujours réels.

Le triangle fondamental est conjugué à lui-même sans être un élément double. Les triangles  $II_a II_b II_c$  et  $II'_a II'_b II'_c$  sont des triangles conjugués généraux. Les triangles doubles sont d'une part le point auxiliaire  $P$  et d'autre part le triangle des autres points doubles ou points harmoniquement associés de  $P$ , soient  $P_1 = D_{2.a}$ ,  $P_2 = D_{2.b}$ ,  $P_3 = D_{2.c}$ .

Les triangles conjugués nous donnent les propriétés suivantes :

1. *La ligne de jonction de deux sommets homologues  $II_a$  et  $II'_a$  passe par le second point double  $\bar{D}_{2.a}$  du côté correspondant  $a$ .*

$II_b II'_b$  passe par  $\bar{D}_{2.b}$  et  $II_c II'_c$  par  $\bar{D}_{2.c}$ .

Le raisonnement est le même que dans le cas général.

2. *Les lignes de jonction des sommets tels que  $II_b$  et  $II'_c$  ou  $II'_b$  et  $II_c$  passent par  $\bar{D}_{2.a}$ ;  $II_a II'_b$  et  $II'_a II_b$  par  $\bar{D}_{2.c}$  puis  $II_a II'_c$  et  $II'_a II_c$  par  $\bar{D}_{2.b}$ .*

En effet dans le quadrangle  $AC'_2 A_2 B'_2$ , la diagonale  $II_b II'_c$  coupe le côté  $B'_2 C'_2$  dans un point qui est le conjugué harmonique du point diagonal sur ce côté, par rapport à  $B'_2$  et à  $C'_2$ . Comme ce point de coupe

doubles. Dans le cas particulier qui nous intéresse, ces éléments doubles seront toujours réels.

Le triangle fondamental est également conjugué à lui-même sans être un élément double. Les triangles  $A_2 B_2 C_2$  et  $A'_2 B'_2 C'_2$  sont des triangles conjugués généraux. Les triangles doubles sont d'une part  $ABC$  sur la droite  $p$  et d'autre part le triangle des points doubles  $D_{2.a}$ ,  $D_{2.b}$  et  $D_{2.c}$ ; les côtés sont aussi les droites harmoniquement associés de  $p$ .

Les triangles conjugués généraux donnent les propriétés suivantes :

1. *Le point de coupe de deux côtés homologues  $B_2 C_2$  et  $B'_2 C'_2$  est situé sur le second rayon double par le sommet correspondant  $A_1$ .*

De même  $A_2 B_2$  et  $A'_2 B'_2$  se coupent sur  $C_1 D_{2.c}$  et  $A_2 C_2$  avec  $A'_2 C'_2$  sur  $B_1 D_{2.b}$ .

Le raisonnement est toujours le même que dans le cas général.

2. *Les points de coupe de deux côtés non homologues comme  $A'_2 C'_2$  et  $A_2 B_2$  ou  $A_2 C_2$  et  $A'_2 B'_2$  sont sur le second rayon double par  $A_1$  soit  $A_1 D_{2.a}$ . De même  $B_2 A_2$  et  $B'_2 C'_2$  ou  $B'_2 A'_2$  et  $B_2 C_2$  se coupent sur  $B_1 D_{2.b}$  puis  $C_2 A_2$  et  $C'_2 B'_2$  ou  $C'_2 A'_2$  et  $C_2 B_2$  sur  $C_1 D_{2.c}$ .*

En effet dans les faisceaux involutifs en  $A$  et  $C$ , les rayons conjugués  $a'_2$  et  $c'_2$  se coupent sur  $B_1 P$ , et dans le quadrilatère  $a'_2, c'_2, b_1, b_2$  le troisième point diagonal est à l'intersection des côtés  $A'_2 B'_2$  et  $B_2 C_2$ , soit sur la

est  $\bar{D}_{2.a}$  à cause des ponctuelles sur  $b_1$  et  $c_1$ , le théorème est démontré et le raisonnement subsiste pour les autres droites de jonction.

3. Dans l'hexagone de sommets  $II_a II'_a II_b II'_b II_c II'_c$ , les points de coupe des côtés opposés sont en ligne droite; celle-ci est la polaire trilinéaire  $p$  du point donné  $P$ .

4. Le point de coupe des droites de jonction des sommets opposés de l'hexagone précédent ou des sommets homologues de deux triangles involutifs est sur une céviennne du point donné  $P$ .

$II_a$  et  $II'_a$ ,  $II_b$  et  $II'_b$  se coupent en un point de la céviennne  $CP$ ; en effet dans le quadrangle  $II_a II'_a II_b II'_b$ , les points  $C$  et  $\bar{D}_{2.c}$  sont, d'après ce qui précède, des points diagonaux.  $C\bar{D}_{2.c}$  est un rayon double en  $C$ . L'autre point diagonal, soit l'intersection de  $II_a II'_a$  avec  $II_b II'_b$ , sera sur le deuxième rayon double de l'involution en  $C$ , soit sur la céviennne  $CP$ .

5. Les tangentes des coniques  $C_{1.a}$ ,  $C_{1.b}$  et  $C_{1.c}$  par les sommets des triangles doubles sont les lignes de jonction de ces points avec les points doubles respectifs  $\bar{D}_{2.a}$ ,  $\bar{D}_{2.b}$  et  $\bar{D}_{2.c}$  sur les côtés du triangle fondamental.

Ceci découle du cas général. Les droites de jonction comme  $II_a II'_a$  passent par le point double correspondant  $\bar{D}_{2.a}$ . Donc

diagonale par le point de coupe de  $a'_2$  et  $c'_2$  ou  $B_1 P$ , à cause des propriétés harmoniques liant  $c'_2$ ,  $a'_2$ ,  $\bar{d}_{2.b}$  et la ligne de jonction de  $B$  avec l'intersection  $(a'_2 c'_2)$ . Ce raisonnement subsiste pour les autres points de coupe.

3. Dans l'hexagone de côtés  $(a_2)(c'_2)(b_2)(a'_2)(c_2)(b'_2)$  les lignes de jonction de deux sommets opposés passent par le pôle trilinéaire  $P$  de  $p$

$$(a_2) = B_2 C_2 ; \quad (a'_2) = B'_2 C'_2 \text{ etc. ...}$$

4. La ligne de jonction des points de coupe de deux paires de côtés opposés de deux triangles involutifs passe toujours par un des points  $ABC$  de la droite  $p$ .

En effet, soient les points de coupe  $t_{a.a'}$  et  $t_{c.c'}$  des côtés  $(a_2)$  et  $(a'_2)$  puis  $(c_2)$  et  $(c'_2)$ , la droite  $t_{a.a'} t_{c.c'}$  passera par  $B$  car dans le quadrilatère  $(a_2)(a'_2)(c_2)(c'_2)$  les diagonales sont  $b_1$  puis  $\bar{d}_{2b}$  qui se coupent en  $D_{2.b}$  et  $t_{a.a'} t_{c.c'}$ . Cette troisième diagonale passera par le conjugué harmonique  $B$  de  $D_{2.b}$ , par rapport à  $B_2$  et  $B'_2$ , et la remarque est démontrée.

5. Les points de tangence des coniques  $K_{1.a}$ ,  $K_{1.b}$  et  $K_{1.c}$  avec les côtés des triangles doubles sont les points de coupe de ces côtés avec les rayons doubles respectifs  $\bar{d}_{2.a}$ ,  $\bar{d}_{2.b}$  et  $\bar{d}_{2.c}$  par les sommets  $A_1 B_1 C_1$  du triangle fondamental.

Ceci résulte du cas général (n° 10). Le point de coupe  $t_{a.a'}$  des tangentes  $(a_2)$  et  $(a'_2)$  de  $K_{1.a}$  est sur  $\bar{d}_{2.a}$ ; cette règle est géné-

$\overline{D}_{2.a}P$  et  $\overline{D}_{2.a}P_1$  par les sommets  $P$  et  $P_1$  des triangles doubles sont des tangentes de  $C_{1.a}$ . Il en est de même avec les deux autres coniques.

6. THÉORÈME. — *Les triangles circonscrits à deux triangles conjugués et dont les côtés passent aussi par les sommets du triangle fondamental forment une nouvelle paire de triangles conjugués.*

Soient  $II_aII_bII_c$  et  $II'_aII'_bII'_c$  deux triangles conjugués. Nous joignons  $II_a$  à  $A$ ,  $II_b$  à  $B$  et  $II_c$  à  $C$  puis  $II'_a$  à  $A$ ,  $II'_b$  à  $B$ , et  $II'_c$  à  $C$  et nous trouvons deux triangles  $III_aIII_bIII_c$  et  $III'_aIII'_bIII'_c$ . Pour démontrer qu'ils sont conjugués, considérons les rayons  $a_3$  et  $b'_3$ . Ces rayons se coupent en un point  $C'_3$  de  $CP$  à cause du quadrilatère complet  $a'_2a_3b_2b'_3$ . La droite  $II_aII'_b\overline{D}_{2.c}$  est une diagonale; la diagonale par  $C'_2$  et  $C'_3$  passera par  $\overline{C}_1$  sur  $AB$ ; elle sera donc confondue avec  $CP$ .

On démontrerait de même que  $a_3$  et  $c'_3$  se coupent en  $B_3$  sur  $BP$ , puis  $b_3$  et  $c'_3$  en  $A_3$  sur  $AA_1$ , etc. Donc les droites par les sommets du triangle fondamental et les sommets respectifs des deux triangles conjugués entraînent un hexagone au sens du 1<sup>er</sup> théorème (n<sup>os</sup> 1 et 11); elles donnent donc lieu à deux nouveaux triangles conjugués.

15. THÉORÈME. — *Les trois coniques  $C_{1.a}$ ,  $C_{1.b}$  et  $C_{1.c}$  n'ont qu'un point commun réel, le point*

rale. Donc les points de coupe de deux tangentes confondues est aussi sur  $\overline{d}_{2.a}$ . Les points de tangence des tangentes doubles  $d_{1.a}$  et  $d_{2.a}$  de  $K_{1.a}$  sont alors les intersections de ces droites avec  $\overline{d}_{2.a}$ .

6. THÉORÈME. — *Les triangles inscrits dans deux triangles conjugués et dont les sommets se trouvent sur les côtés du triangle fondamental forment une nouvelle paire de triangles conjugués.*

Soient  $A_2B_2C_2$  et  $A'_2B'_2C'_2$  deux triangles conjugués.  $A_2B_2$  coupe  $c_1$  en  $C_3$ ,  $B_2C_2$  coupe  $a_1$  en  $A_3$  et ainsi de suite.

Nous trouvons deux triangles  $A_3B_3C_3$  et  $A'_3B'_3C'_3$ . Pour démontrer qu'ils sont conjugués considérons les points  $A_3$  et  $B'_3$ , leur ligne de jonction passe par le point  $C$  à cause du quadrangle  $A'_2A_3B_2B'_3$ ; le premier point diagonal est  $C_1$  sur  $a_1$  et  $b_1$ ; le deuxième est sur  $A'_2C'_2$  et sur  $B_2C_2$ , soit sur  $C_1P = \overline{d}_{2.c}$ ; le troisième point sera sur  $C_1C$  conjugué harmonique de  $C_1P$  et en même temps sur  $A'_2B_2$ ; c'est  $C$ .

On démontrerait de la même manière que  $B'_3C_3$  passe par  $A$  et ainsi de suite. Les points considérés forment donc un hexagone fermé, au sens du 1<sup>er</sup> théorème (n<sup>os</sup> 2 et 12). Ils donnent lieu à deux nouveaux triangles conjugués.

16. THÉORÈME. — *Les trois coniques  $K_{1.a}$ ,  $K_{1.b}$  et  $K_{1.c}$  n'ont qu'une tangente commune réelle,*

$P$ , les deux autres points communs possibles sont imaginaires.

Soit  $P'$  un tel point; les rayons homographiques conjugués  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$ , se coupent en  $P'$ ; un des triangles de l'involution se ramènera ainsi à un point; le triangle conjugué doit être tel que les lignes de jonction de ses sommets avec  $P'$  se coupent sur les céviennes de  $P$  (n° 13, 4); mais comme elles se coupent en  $P'$ , il faut que  $P'$  coïncide avec  $P$ . Nous avons supposé  $P'$  différent de  $P$ ; donc le triangle conjugué du point  $P'$  doit se ramener à un point  $P''$ . Les points  $P'$  et  $P''$  seront communs aux trois courbes. Dans ce cas-là, les droites comme  $II_aII'_a$ ,  $II_bII'_b$  et  $II_cII'_c$  passeront respectivement par  $\overline{D}_{2,a}$ ,  $\overline{D}_{2,b}$ ,  $\overline{D}_{2,c}$ ; donc les deux points  $P'$  et  $P''$ , s'ils sont possibles, seront sur la droite  $p$ ; en d'autres termes *la droite  $p$  passe par les deux points communs des coniques  $C_{1,a}$ ,  $C_{2,b}$  et  $C_{1,c}$  différents de  $P$ .*

Les points de coupe de  $p$  avec une des courbes peuvent-ils être réels ?

Soit le quadrangle  $PP_1P_2P_3$ ;  $CA$  et  $CB$  sont des tangentes de  $C_{1,c}$ ; ces tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport à  $PP_3$  et  $P_1P_2$ .  $PP_3$  est en outre une corde de la courbe et le segment qui contient  $C$  est ex-

*la droite  $p$ ; les deux autres tangentes communes possibles sont imaginaires.*

Soit  $p'$  une telle tangente commune différente de  $p$ . Les points conjugués homographiques  $A^*B^*C^*$  se trouvent alors sur cette droite et y déterminent un triangle de l'involution. D'après une remarque précédente (n° 14, 4) les points de coupe de  $p'$  avec les côtés correspondants du triangle conjugué entraîneront des lignes de jonction passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur  $p$ . Il faudrait donc que  $p$  coïncidât avec  $p'$  ce qui est impossible. Le triangle conjugué peut alors se ramener à un autre segment de droite  $p''$ .

Dans ce cas, les points de coupe  $t_{a,a'}$  et  $t_{c,c'}$  des paragraphes précédents devant être sur  $\overline{d}_{2,a}$ ,  $\overline{d}_{2,b}$  ou  $\overline{d}_{2,c}$  et d'un autre côté ces points devant coïncider avec le point d'intersection unique de  $p'$  et  $p''$ , il faudra forcément que tous ces points coïncident avec le pôle trilinéaire  $P$  de  $p$ . En d'autres termes les deux triangles conjugués rectilignes, s'ils sont possibles, sont les tangentes de l'une quelconque des coniques  $K_{1,c}$  par  $P$  ou *les tangentes communes des coniques  $K_{1,a}$ ,  $K_{1,b}$  et  $K_{1,c}$  différentes de  $p$  passent par le point  $P$ .*

Voyons maintenant si ces tangentes sont réelles.

Soit le quadrangle  $PP_1P_2P_3$ ;  $C_1A_1$  et  $C_1B_1$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $C_1C$  et  $C_1D_{2,c}$ .  $C_1A_1$  et  $C_1B_1$  sont des tangentes de  $K_{1,c}$ ;  $PP_3$  est une sécante; la courbe est dans l'angle des tangentes qui contient



térieur par rapport à cette même courbe. La courbe est ainsi dans l'angle des tangentes CA et CB qui contient  $PP_3$ .  $P_1CP_2$  est dans l'autre angle. Le segment AB contenant  $\bar{D}_{2.c}$  sur  $P_1P_2$  est extérieur par rapport à la même courbe.

Les tangentes  $\bar{D}_{2.c}P$  et  $\bar{D}_{2.c}P_3$  donnent un nouvel angle limitant la courbe. La courbe est dans l'angle qui contient AB. D'autre part  $BP_3$  est une corde et le segment qui contient  $P_1$  sur  $P_2P_3$  est extérieur.  $\bar{D}_{2.b}$  est conjugué harmonique de B par rapport à  $P_1P_3$ ,  $\bar{D}_{2.b}$  est donc entre  $P_1$  et  $P_3$  du côté opposé à B.  $\bar{D}_{2.b}$  est alors entre  $P_1$  et  $P_3$ , dans l'angle extérieur  $P_1\bar{D}_{2.c}P_3$ .

Dans ces conditions  $\bar{D}_{2.c}\bar{D}_{2.b}$  est dans l'angle des tangentes par  $\bar{D}_{2.c}$  qui ne contient pas la courbe  $C_{1.c}$  et les points de coupe de la droite  $\bar{D}_{2.c}\bar{D}_{2.b}$  ou  $p$  avec la courbe  $C_{1.c}$  sont imaginaires.

On démontrerait de la même manière que la droite  $p$  ne coupe pas les autres coniques. Donc les trois coniques, d'après ce qui précède, n'ont pas d'autres points communs réels que P et le théorème est démontré.

*Généralisation.* — Les trois coniques relatives au cas général sont identiques aux coniques relatives à notre cas particulier, puisqu'elles ont toujours au moins un point réel commun. Il suffira de considérer ce point commun P, comme point lié au triangle fondamental et d'utiliser ses céviennes comme axes d'homologie.

$PCP_3$  et  $C_1C$  est dans l'autre angle, donc cette dernière droite ne coupe pas la courbe. En outre le segment  $A_1B_1$  qui contient C est un segment extérieur; nous savons encore que les tangentes par C sont les droites CA et  $CD_{2.b}$ ; les points A et  $D_{2.b}$  sont les intersections de  $C_1B_1$  avec  $A_1P_3$  et de  $C_1A_1$  avec  $B_1P_3$ ; les points de tangence sont  $L_1$  et  $L_2$  sur la sécante  $PP_3$ .

La droite  $PP_2$  qui passe par  $D_{2.b}$  et  $B_1$  est dans l'angle des tangentes  $C_1A_1$  et  $C_1D_{2.b}$  qui contient la courbe, puisque  $B_1$  est sur la courbe.

$B_1$  sur  $c_1$  est entre C et  $D_{2.c}$  du côté opposé à  $A_1$ .  $B_1P$  donne P entre  $L_2$  et  $D_{2.c}$  du côté opposé à  $C_1$ .  $L_1$  est entre  $C_1$  et  $D_{2.c}$  du côté opposé à  $L_2$ , donc  $L_1$  est entre  $L_2$  et  $D_{2.c}$  du côté de  $C_1$ . Dans ces conditions P ne peut pas être sur le segment  $L_1L_2$  qui contient  $C_1$ , mais étant sur la même direction, il sera de l'autre côté de  $C_1$ , autrement dit P est à l'intérieur de la courbe  $K_{1.c}$ . Les tangentes de  $K_{1.c}$  par P sont alors imaginaires.

D'après ce qui précède, nous pouvons en conclure que les trois courbes n'ont pas d'autres tangentes communes et réelles que  $p$ , et le théorème est démontré.

*Généralisation.* — Les coniques du cas général sont identiques à celles-ci, puisqu'elles ont toujours au moins une tangente commune réelle. Il suffira de considérer cette tangente comme triangle auxiliaire et d'utiliser ses points de coupe avec les côtés du triangle fondamental comme centres d'homologie.

Le théorème s'appliquera aux trois coniques et nous pourrons en conclure que les courbes du cas général n'ont également qu'un point commun réel, les deux autres sont des points imaginaires.

#### SUR UNE CORRESPONDANCE (1-2).

Si nous considérons les trois coniques  $C_{1.a}$ ,  $C_{1.b}$  et  $C_{1.c}$  du cas général ou du cas particulier, nous pouvons les regarder comme engendrées par les triangles involutifs.

Toute droite  $AII_a$  par  $A$  coupe  $C_{1.a}$  en deux points  $II_a$  et  $II''_a$ . Chaque point correspond à un triangle de l'involution et par conséquent à un rayon  $a_2$  ou  $a_2''$ .

En raisonnant ainsi nous voyons qu'à tout rayon  $AII_a$  par  $A$  correspondent deux rayons  $a_2$  et  $a_2''$  également par  $A$ .

Les rayons en  $A$  formeraient alors une correspondance (1-2) dont les rayons doubles simples sont les côtés  $AB$  et  $AC$  du triangle fondamental. Les rayons conjugués confondus s'obtiendront quand le triangle  $II_aII_bII_c$  se ramènera à une droite ou à un point. La première alternative est impossible et d'autre part le triangle  $II_aII_bII_c$  ne peut se ramener qu'une fois à un point, le point commun réel des trois courbes.

Les correspondances considérées n'ont donc qu'une paire de rayons homologues simples confondus; les deux autres paires sont imaginaires.

Le théorème s'appliquera à ces coniques et nous pourrons en conclure que les courbes du cas général, comme celles que nous venons de voir, n'ont qu'une tangente commune réelle les deux autres étant imaginaires.

#### SUR UNE CORRESPONDANCE (1-2).

Les trois coniques  $K_{1.a}$ ,  $K_{1.b}$  et  $K_{1.c}$  du cas général ou du cas spécial peuvent être considérées comme enveloppées par les triangles involutifs.

Par tout point  $A''$  de  $a_1$  on peut mener en général deux tangentes de  $K_{1.c}$ . Chaque tangente correspond à un triangle de l'involution et par conséquent à un point  $A_2$  ou  $A''_2$  sur  $a_1$ .

D'après ce raisonnement, à tout point  $A''$  sur  $a_1$  correspondent également deux points  $A_2$  et  $A''_2$  aussi sur  $a_1$ .

Les points de la base  $a_1$  forment alors une correspondance (1-2) dont les points doubles simples sont dans les sommets  $B_1$  et  $C_1$  du triangle fondamental.

On aura les points conjugués confondus quand le triangle correspondant se ramènera à une droite. Nous aurons ce cas avec la droite  $p$  ou la tangente commune des trois courbes. Elle représente un triangle limite et ce cas n'est possible qu'une fois.

Les correspondances considérées n'ont qu'une paire de points homologues confondus; les deux autres paires sont imaginaires.

Nous pouvons encore remarquer que le côté AB formé de deux rayons simples confondus représente les deux rayons conjugués du côté AC et réciproquement, AC représente les deux rayons simples confondus conjugués du côté AB.

Nous pouvons observer également que les deux points conjugués du sommet  $C_1$  par exemple, sont confondus en  $B_1$  et réciproquement, les conjugués de  $B_1$  sont confondus en  $C_1$ .

§ III. — Autres cas spéciaux du groupement des involutions.

17. *Le triangle fondamental est une droite ABC ou p et le triangle auxiliaire  $A_1B_1C_1$  est quelconque.* (Fig. 3.)

Les observations et les raisonnements du cas général sont valables. Nous aurons en A, B, C les mêmes groupements de rayons par cycles hexagonaux fermés.

Les faisceaux obtenus formeront des involutions dans lesquelles les premiers rayons doubles seront confondus avec la droite p. Les seconds seront les conjugués harmoniques des premiers par rapport à un côté du triangle auxiliaire comme  $a_1$  en A et à son homologue  $AA_1 = a'_1$ .

Les points de coupe de ces seconds rayons doubles avec les côtés du triangle auxiliaire sont les pieds des céviennes du pôle trilinéaire P de p par rapport à ce triangle  $A_1B_1C_1$ .

Les involutions en A, B, C, prises deux à deux, sont doublement homologues puisqu'elles ont deux rayons doubles conjugués, confondus en p. Ce sont du reste les involutions de rayons

18. *Le triangle fondamental se ramène à trois droites concourantes  $a_1, b_1, c_1$  passant par le point P tandis que le triangle auxiliaire ABC est quelconque.* (Fig. 2.)

Les observations et les raisonnements du cas général sont toujours valables et nous aurons sur  $a_1, b_1$  et  $c_1$  les mêmes groupements de points par cycles hexagonaux fermés.

Les ponctuelles obtenues formeront des involutions de points dans lesquelles les premiers points doubles sont confondus avec le point commun P. Les seconds sont les conjugués harmoniques des premiers par rapport au sommet correspondant du triangle auxiliaire, comme A, et à son conjugué  $\bar{A}_1$  sur  $a_1$ .

Ces points doubles ci sont les points harmoniquement associés de P.

Les involutions sur  $a_1, b_1, c_1$  considérées deux à deux sont doublement homologues parce qu'elles ont toujours deux points doubles conjugués, confondus en P. Nous avons déjà