

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 17 (1915)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Edouard Goursat. — Cours d'Analyse mathématique. Tome III. Seconde édition. Intégrales infiniment voisines. Equations aux dérivées partielles du second ordre. Equations intégrales. Calcul des variations. 1 vol. gr. in-8° de vi-668 p. et 23 fig. ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

cherche à plier les faits au cadre idéal qu'il s'est tracé, au lieu de se laisser guider par eux dans la recherche de la vérité.

La thèse soutenue par M. Duhem soulève des problèmes délicats. Sur un point toutefois elle nous paraît indiscutable. En ce qui concerne l'histoire des sciences durant ces dernières années, certains auteurs allemands ont mis surtout en lumière la part qui revenait à leurs compatriotes dans les découvertes scientifiques ; la tentation était grande dès lors de considérer celles-ci comme une propriété nationale. Il n'est que juste de réagir contre cette prétention et de rétablir les faits dans leur intégrité.

Mais, nous nous hâtons de l'ajouter, le livre de M. Duhem n'est pas un livre de polémique à courte vue. Il affirme l'existence de la science comme étant une œuvre collective, à la création de laquelle chaque peuple contribue suivant son génie propre. Il renferme en outre sur les récents débats philosophiques des vues du plus grand intérêt.

A cet égard, les géométries non-euclidiennes et le principe de relativité nous semblent avoir une importance plus grande que ne leur en attribue M. Duhem. Dans ce domaine un appel au bon sens, conçu comme une base première et indéfinissable, nous paraît dangereux. Au Moyen Age la révolution du soleil et des planètes autour de la terre était une vérité de sens commun. Une étude plus approfondie du mouvement des corps célestes a montré la portée relative de cette vérité. Un raisonnement analogue pourrait s'appliquer aux principes de la géométrie euclidienne et à ceux de la mécanique classique acceptés par le sens commun ; ces principes ne comportent peut-être qu'une vérité relative par rapport à d'autres principes plus généraux qu'une expérience élargie permettrait d'établir. En tout cas, invoquer purement et simplement le sens commun ne suffit pas, nous semble-t-il, pour trancher le débat.

Arnold REYMOND, Université de Neuchâtel.

Edouard GOURSAT. — **Cours d'Analyse mathématique.** Tome III. Seconde édition. *Intégrales infiniment voisines. Equations aux dérivées partielles du second ordre. Equations intégrales. Calcul des variations.* 1 vol. gr. in-8° de vi-668 p. et 23 fig. ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'énorme matière contenue dans ce volume, bien que condensée par M. Goursat d'une façon des plus heureuses, est fort difficile à analyser dans un article aussi limité que celui-ci.

Il y a là douze chapitres (XXIII à XXXIV) ayant tous une importance de premier ordre ; je vais pourtant essayer d'en préciser la portée en disant quelques mots de chacun.

Le premier a trait aux intégrales d'équations différentielles ordinaires infiniment voisines d'intégrales correspondant, soit à de certaines valeurs initiales des variables, soit à des valeurs particulières de paramètres figurant dans les équations. Le second cas est peut-être le premier par la date ; il correspond aux travaux dus à Henri Poincaré et concernent le Problème des trois corps. Ceci nécessitait la considération des *équations aux variations*, qui forment des systèmes linéaires, si bien qu'ici ce sont d'abord de tels systèmes qui sont étudiés en faisant plus particulièrement usage de la méthode d'approximations successives due à M. Emile Picard. Faut-il rappeler toutes les applications mécaniques de telles considérations ; on les retrouve notamment dans la théorie des petits mouvements et le langage

mécanique s'est introduit pour qualifier les solutions de *stables* ou *d'instables*, ce que M. Goursat fait saisir très simplement sur des systèmes particulièrement élémentaires.

En ce qui concerne (Ch. XXIV) les équations aux dérivées partielles du second ordre, on sait que l'auteur a déjà publié, sur leur intégration, un vaste ouvrage en deux volumes. Il n'a eu qu'à en résumer les points les plus essentiels en accordant une importance particulière aux équations de Monge-Ampère. L'étude de ces équations n'est vraiment élémentaire que dans le cas où existent des intégrales intermédiaires, mais, quelque limité que soit celui-ci, il est encore fécond si l'on prend par exemple l'équation de Laplace

$$s + ap + bq + cz + g = 0$$

pour chercher le cas où elle admet une telle intégrale et ramener à celui-ci une infinité de cas récurrents ; une circonstance, bien particulière d'abord, n'en donne pas moins une théorie très étendue.

Les équations à  $n$  variables (Ch. XXV) se sont surtout introduites dans la science avec le problème général de la propagation des ondes, du moins lorsqu'elles ont leurs caractéristiques réelles ; M. Goursat nous montre la chose sur des exemples encore très simplement élégants, et, prenant les équations les plus importantes de la théorie de la chaleur, insiste sur la genèse des solutions procédant d'abord de solutions très particulières, ne contenant que des constantes arbitraires  $a, b, c, \dots$ , mais qui, multipliées par  $\varphi(a, b, c, \dots) da db dc \dots$  et alors intégrées dans le domaine  $a, b, c, \dots$ , peuvent dépendre de la fonction arbitraire  $\varphi$ . Pour les équations purement linéaires ce fut d'abord là l'essentiel des méthodes de Cauchy et de Fourier, ce qu'il serait injuste d'oublier devant nombre de perfectionnements récents.

L'étude spéciale des équations du type hyperbolique (Ch. XXVI) est précédée par l'étude de l'équation  $s = f$ , où  $f$  est connue. Sans doute une intégration double donnerait immédiatement la solution, mais ne donnerait point l'idée des méthodes variées, imposées par les conditions aux limites des problèmes physiques, dans le cas hyperbolique général. Et nous voyons celles-ci, très simplement, sur  $s = f$ . Au problème de Cauchy se sont adjoints d'autres problèmes aux limites, notamment celui consistant à déterminer une surface intégrale passant par deux courbes données, qui doit beaucoup aux efforts personnels de M. Goursat. Il faut observer aussi que l'équation des cordes vibrantes ou du mouvement rectiligne d'un gaz n'est pas plus compliquée que  $s = 0$ . Le cas de  $s = f$  est donc déjà très important par lui-même. Vient ensuite la méthode de Riemann, avec sa si importante notion d'équation adjointe, pour quelques équations à coefficients constants telles que l'équation des télégraphistes. Comme équation à trois variables nous trouvons celle des ondes cylindriques étudiée par M. Volterra ; rappelons que l'ingéniosité d'un géomètre français, M. R. d'Adhémar, met à la base de cette étude une formule analogue à celle de Green, mais où la notion de normale est remplacée par celle de droites symétriques des normales ordinaires et qualifiées de *conormales*.

Pour les équations du type elliptique (Ch. XXVII) l'essentiel est l'équation de Laplace à laquelle satisfait le potentiel logarithmique et qui correspond à la théorie des fonctions analytiques. Les problèmes aux limites sont les plus fameux de tous ; ce sont ceux de Dirichlet et Neumann. Nous voyons

ici successivement les idées fondamentales de Riemann, Neumann, Schwartz, ces dernières liées avec le problème de la représentation conforme, puis une théorie sommaire de la fonction de Green. Certes il peut sembler, au premier abord, que chercher la fonction de Green soit (sauf cas particuliers) aussi difficile que résoudre le problème de Dirichlet par une autre méthode : la difficulté n'aurait fait que changer de nom. Mais de profonds et récents travaux ont justement montré que la fonction de Green avait des propriétés susceptibles d'être généralisées pour des équations elliptiques autres que celle de Laplace et même pour des équations paraboliques, si bien que l'usage de cette fonction a constitué une méthode d'importance croissante. Et, si je ne me trompe, c'est justement ce que M. Goursat met bien en relief.

Pour l'équation de Laplace à trois variables (Ch. XXVIII) les problèmes physiques examinés dans le cas de deux variables peuvent être conservés avec quelques changements parfois assez notables, mais des théories, telles que celle de la représentation conforme, s'évanouissent d'une manière un peu déconcertante. L'intérêt revient ici vers les potentiels ; le Chapitre suivant (XXIX), consacré à l'équation de la chaleur, montre, comme je le disais tout à l'heure, la souplesse de la notion de fonction de Green. On a pu rebâtir, pour l'équation parabolique en litige, une fonction analogue quant à la résolution de certains problèmes aux limites. Signalons aussi que, dans toutes ces questions, M. Goursat a donné une place importante aux si intéressantes transformations qui changent les équations en elles-mêmes et qui permettent, par suite, de déduire de nouvelles solutions de solutions déjà connues. Les nouvelles solutions ont généralement un degré de généralité supérieur à celui des solutions primitives, ce qui fait revenir à l'importante remarque déjà faite à propos du Chapitre XXV.

Nous trouvons maintenant quatre chapitres de la plus haute importance sur les équations intégrales ; vis-à-vis de la prodigieuse accumulation des mémoires originaux, ils seront d'une valeur inestimable et ceci s'explique mieux que par la grande érudition de l'auteur qui a, en outre, apporté une contribution personnelle considérable à ce sujet touffu en commençant par le résumer, à son point de vue, dans un Mémoire publié, en 1908, aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

La méthode des approximations successives (Ch. XXX) est celle qui permet d'aborder, de la manière la plus simple, d'abord les équations intégrales à limites variables de Volterra, ensuite les équations à limites fixes de Fredholm. Dans les deux cas on obtient comme solutions des séries entières par rapport au paramètre  $\lambda$  figurant dans les équations. Le raisonnement formel est très simple, et si les démonstrations de convergence le sont parfois un peu moins, elles ne laissent plus cependant le moindre doute. Dans le cas de Volterra, la série entière en  $\lambda$  est une fonction entière ; dans le cas de Fredholm, c'est une fonction méromorphe que, conformément à un théorème connu, on peut se proposer de mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières. Pour parvenir à ce but, la méthode d'induction de Fredholm (Ch. XXXI) reste la plus indiquée. Des théorèmes d'un exceptionnel intérêt s'attachent aux fonctions entières ainsi introduites, notamment quant à la détermination de leurs zéros et de leur genre. Qui aurait cru, lorsque Laguerre parlait de cette notion de genre, lorsque Weierstrass faisait connaître ses décompositions en facteurs primaires, que tout ceci interviendrait de manière aussi nécessaire et aussi intime dans ces

équations intégrales nées elles-mêmes des problèmes aux limites de la Physique mathématique? C'est en vue de problèmes physiques qu'on a d'abord introduit le concept de fonctions fondamentales (Ch. XXXII). Elles figurent, en fait, dans les développements trigonométriques de Cauchy et Fourier et sont des sinus ou des cosinus, c'est-à-dire des fonctions satisfaisant à des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Un peu plus tard, dans des problèmes tels que celui du refroidissement d'une barre hétérogène, il fallut tirer les fonctions fondamentales d'équations linéaires à coefficients variables; ce n'était pas beaucoup plus difficile au point de vue formel, mais hors de cela tout restait dans l'ombre, même la convergence des séries obtenues. Combien nous sommes plus avancés aujourd'hui! Les identités intégrales élémentaires qui servent de base à la théorie des séries trigonométriques ont été prodigieusement généralisées et donnent les admirables théories de l'orthogonalité et de la symétrie des noyaux qui peuvent d'ailleurs être exposées à part, comme l'ont fait Hilbert et Schmidt, mais que M. Goursat réunit au reste avec une rare aisance.

Quant aux applications des équations intégrales (Ch. XXXIII), elles concernent les équations différentielles linéaires, en commençant d'abord par l'équation du premier ordre, puis la recherche des solutions périodiques pour les équations à coefficients périodiques, enfin les équations aux dérivées partielles qui nous ramènent aux problèmes de Dirichlet et Neumann, dont la difficulté fut l'aiguillon qui poussa les géomètres dans les magnifiques voies précédentes. Pour ces problèmes et d'autres du même genre, M. Goursat s'est attaché à revenir aux fonctions de Green déjà examinées hors de la théorie des équations intégrales.

D'une manière plus générale, l'éminent géomètre a toujours eu en vue les problèmes anciens et la manière de les accorder avec la théorie récente; ainsi, à propos des équations de Volterra de première espèce, il traite l'équation d'Abel. Tout cela rappelle le criterium d'Hermite qui ne trouvait bonnes les théories nouvelles que quand elles redonnaient tout d'abord les cas particuliers déjà connus. A cet égard l'exposition de la théorie des équations intégrales, telle que M. Goursat vient de la faire, est un modèle du genre. Je crois d'ailleurs qu'on pourrait en dire autant pour l'exposition du Calcul des variations (Ch. XXXIV), car nous y retrouvons, en une centaine de pages, l'essentiel des grands ouvrages dus à MM. Bolza et Hadamard.

Après l'étude de la première variation, qui conduit à l'équation d'Euler, M. Goursat traite en détail le problème pour lequel les extrémales sont toutes les courbes de Ribaucour; c'est la généralisation du cas archaïque de la cycloïde considérée comme brachistochrone. La seconde notion très importante est celle d'une extrémale dont les extrémités doivent se mouvoir sur des lignes données, d'où les conditions de *transversalité* fort anciennement considérées dans des cas particuliers, mais dont l'étude vraiment développée n'apparaît qu'avec Kneser. Après les problèmes d'extremum lié (type lignes géodésiques) et les problèmes isopérimétriques, nous retrouvons la méthode d'Euler étendue aux intégrales doubles.

Dans l'étude de la seconde variation, les conditions de Legendre et de Jacobi se lient comme l'équation de Riccati se lie à l'équation linéaire du second ordre; elles conduisent à une très importante interprétation géométrique où des enveloppes d'extrémales donnent de certains points, nommés

foyers, dont la seule position permet de juger de la réalisation ou de la non-réalisation des conditions en litige (exemples empruntés encore aux courbes de Ribaucour). Mais, d'une manière générale, ces conditions demandent encore à être complétées; elles l'ont été par un beau théorème de Weierstrass. Si l'on ajoute que, pour pouvoir développer plus complètement les théories de ce dernier, il est nécessaire d'abandonner les courbes définies par une seule équation et de recourir à leur représentation paramétrique, on aura l'idée du chemin aussi complet que condensé suivi par M. Goursat. Les exemples abondent tant dans le texte que dans les compléments et exercices reportés à la fin du chapitre.

La même remarque peut d'ailleurs être faite pour tous les chapitres de cet ouvrage qui, parmi les publications de ces dernières années, n'a point son égal. En matière de théorie des fonctions, d'équations différentielles ou intégrales, de calcul des variations, les extrêmes développements de la science ont poussé les jeunes auteurs vers les monographies. Nous devons être reconnaissants à qui nous présente les mêmes trésors nettement rattachés à toute la glorieuse science des précédentes générations.

A. BUHL (Toulouse).

LÉON LECORNU. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole polytechnique. — Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de IV-538 p. et 110 fig.; 18 fr.; Gauthier-Villars Paris.

Ce second volume débute par les théorèmes généraux relatifs à la Dynamique des systèmes de points; l'auteur n'a pas commencé par considérer des groupes de  $3n$  équations. Avec les notions de somme, de dérivée géométrique, il exprime chaque théorème par une seule équation, mais il ne fait ainsi usage du calcul vectoriel que dans des cas où tout le monde peut l'employer sans étude spéciale; le bénéfice est notable.

Il revient d'ailleurs ensuite aux équations développées.

Pour l'étude des systèmes à liaisons, le principe de d'Alembert est immédiatement introduit et appliqué aussi bien à un système très simple ne comprenant que deux points, qu'au *fil* qui en comprend une infinité; le dit principe est d'ailleurs combiné avec celui des travaux virtuels. On peut alors traiter, de la manière la plus naturelle, certains problèmes où les liaisons sont figurées par des courbes déformables (comme dans le pendule de longueur variable), problèmes auxquels, si je ne me trompe, M. Lecornu a consacré d'importants travaux personnels.

Des pages intéressantes sont consacrées aux systèmes isolés qui semblent cependant pouvoir modifier leur orientation (problèmes du chat et analogues), au principe de la moindre contrainte, dû à Gauss, mais dont toute la fécondité n'a certainement pas été remarquée du temps de Gauss, et à la mécanique de Hertz qui remplace les forces par les liaisons avec adjonction de masses cachées, telle que celle de l'éther. Pour Hertz il y avait là un point de départ tandis qu'ici la chose est toujours en dépendance du principe de d'Alembert et du théorème du travail virtuel.

Quant aux applications des théorèmes généraux sous leur forme la plus classique, M. Lecornu a su trouver une collection de jolis problèmes; signalons celui des quatre points formant un losange qui semble pouvoir se retourner dans son plan sans forces extérieures et, ce qui est mieux, sans variation du moment d'inertie.