

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TRIGONOMÉTRIE DANS SES RAPPORTS AVEC LA GÉOMÉTRIE
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: III. — Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16317>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Mais

$$\sin \gamma = \frac{h'}{b} .$$

Par suite

$$\sin (\alpha' - \beta) = \frac{h'}{b} = \frac{h'(c' + c'')}{b \cdot c} = \frac{h'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} .$$

$$\begin{aligned} \sin (\alpha' - \beta) &= \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} , \\ &= \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \left[-\frac{c'}{b} \right] \cdot \frac{h'''}{a} . \end{aligned}$$

Or

$$\cos \alpha' = -\frac{c'}{b}$$

puisque α' est obtus ; donc

$$(III) \quad \sin (\alpha' - \beta) = \sin \alpha' \cdot \cos \beta - \cos \alpha' \cdot \sin \beta .$$

D. — *Formule du cosinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de tirer cette formule de la relation (II) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'établir en se basant sur la figure 1.

Choisissons un angle aigu α du triangle et soit α' l'angle extérieur correspondant. Nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} \alpha' &= \beta + \gamma , \quad \gamma = \alpha' - \beta ; \\ \cos \gamma &= \cos (\alpha' - \beta) , \quad \cos (\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{aa''}{ab} , \\ h''^2 &= c'c'' + aa'' , \\ \cos (\alpha' - \beta) &= \frac{h''^2 - c'c''}{ab} = \frac{h''}{b} \cdot \frac{h''}{a} - \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} ; \end{aligned}$$

α' est obtus :

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= \frac{h'''}{b} ; \quad \sin \beta = \frac{h'''}{a} ; \\ \cos \alpha' &= -\frac{c'}{b} ; \quad \cos \beta = \frac{c''}{a} ; \end{aligned}$$

$$(IV) \quad \cos (\alpha' - \beta) = \cos \alpha' \cdot \cos \beta + \sin \alpha' \cdot \sin \beta .$$

III. — Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.

En appliquant les formules précédentes et celles qui en découlent au triangle quelconque, on retrouve les relations de certains théorèmes importants de géométrie et l'on arrive à établir des théorèmes nouveaux.

l'un des côtés adjacents est égal au rectangle construit sur le plus grand côté et la projection du 1^{er} sur lui diminué du rectangle construit sur le 3^e côté et la projection du 1^{er} sur lui.

Remarque. — En prenant

$$\sin \alpha = \frac{h'''}{b} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{c'}{b} ,$$

la formule de $\sin(\alpha + \beta)$ conduirait aussi à la 1^{re} des relations (1); dans le cours des opérations il y aurait lieu toutefois de remplacer cc' par bb'' .

Cas particuliers. — 1. $C = 90^\circ$. — Alors h' est confondu avec b et h'' avec a .

Par suite

$$a' = a , \quad b'' = b ,$$

et la première des relations (1) devient :

$$c^2 = a^2 + b^2 . \quad (\text{théorème de Pythagore})$$

2. — $A = 90^\circ$. h'' est confondu avec c , donc $b'' = 0$.

La formule

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

devient

$$c^2 = aa' ,$$

ou : *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*

Les relations (1) peuvent être mises sous une autre forme. En effet :

$$c^2 = aa' + bb'' = a(a - a'') + b(b - b') ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - aa'' - bb' .$$

Mais

$$bb' = aa'' .$$

Par suite

$$(2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' . \quad (C \text{ aigu})$$

On retrouve ainsi le *théorème de Pythagore généralisé*.

B. — *Application de la formule de $\cos(\alpha + \beta)$. (Dédution du théorème de Pythagore).* — Soient α, β, γ les angles d'un triangle quelconque. Nous avons alors (fig. 1) :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b} .$$

Mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'c}{bc} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a'c''}{bc}.$$

En remplaçant on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} \right],$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} \right].$$

Or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

d'où

$$(a) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc}.$$

Mais

$$\text{et } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{h'''}{b} = \frac{h''}{c}, \\ \sin \beta = \frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a}. \end{cases}$$

Prenons d'abord :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'}{c}.$$

Par suite

$$\frac{h'h'''}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} = \frac{ac - a'c''}{bc},$$

ou

$$h'h''' = ac - a'c''.$$

Par permutation cyclique on obtient deux nouvelles formules formant avec la précédente le groupe suivant :

$$(3) \quad \begin{cases} h'h''' = ac - a'c'' \\ h''h' = ba - b'a'' \\ h'''h'' = cb - c'b'' \end{cases}.$$

Les relations du groupe (3) donnent lieu au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Revenons à la relation (a) ci-dessus :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc},$$

et combinons d'autres valeurs de $\sin \alpha$ et $\sin \beta$ pour former le produit $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ (fig. 1) :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

d'où

$$\frac{h'''^2}{ab} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} ,$$

$$h'''^2 = a^2 - \frac{aa'c''}{c} .$$

Mais

$$aa' = cc'' ,$$

car

$$\cos \beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a} .$$

Il en résulte

$$h'''^2 = a^2 - c''^2 ,$$

ou

$$(4) \quad a^2 = c''^2 + h'''^2 .$$

La formule de $\cos(\alpha + \beta)$ nous a donc permis de retrouver le THÉORÈME DE PYTHAGORE (triangle rectangle BCF).

En troisième lieu nous pouvons aussi écrire :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{h''}{c} \cdot \frac{h'}{c} ,$$

d'où, si l'on compare avec l'égalité (a) :

$$\frac{h'h''}{c^2} = \frac{a}{b} - \frac{a'c''}{bc} ,$$

$$h'h'' = \frac{ac^2}{b} - \frac{a'c''c}{b} = \frac{c(ac - a'c'')}{b} .$$

Nous avons trouvé (formule 3) :

$$h'h''' = ac - a'c'' .$$

Substituons

$$h'h'' = \frac{c \cdot h' \cdot h'''}{b} ,$$

d'où

$$(5) \quad \frac{h''}{h'''} = \frac{c}{b} .$$

Nous retrouvons une propriété connue : *Le rapport de deux hauteurs est égal au rapport inverse des côtés correspondants.*

Enfin, si l'on choisissait les valeurs encore disponibles de $\sin \alpha$ et $\sin \beta$ pour obtenir le produit $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, on arriverait aussi à la propriété précédente.

C. — *Application des formules de $\sin(\alpha - \beta)$ et $\cos(\alpha - \beta)$.* — La formule de $\sin(\alpha - \beta)$, appliquée au triangle quelconque, conduit aux relations (1) auxquelles a donné lieu celle de $\sin(\alpha + \beta)$ et en appliquant la formule de $\cos(\alpha - \beta)$ on retrouve les relations (3), (4) et (5) fournies par celle de $\cos(\alpha + \beta)$.

D. — *Application de la formule $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.* Appliquée au triangle quelconque, cette formule permet d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si d'un sommet B d'un triangle quelconque ABC on abaisse la perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle A et de son pied S la perpendiculaire sur le côté AB, cette dernière perpendiculaire a toujours pour mesure la MOITIÉ de la hauteur issue du sommet B.*

En effet, d'après la figure 3, la relation

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

peut s'écrire

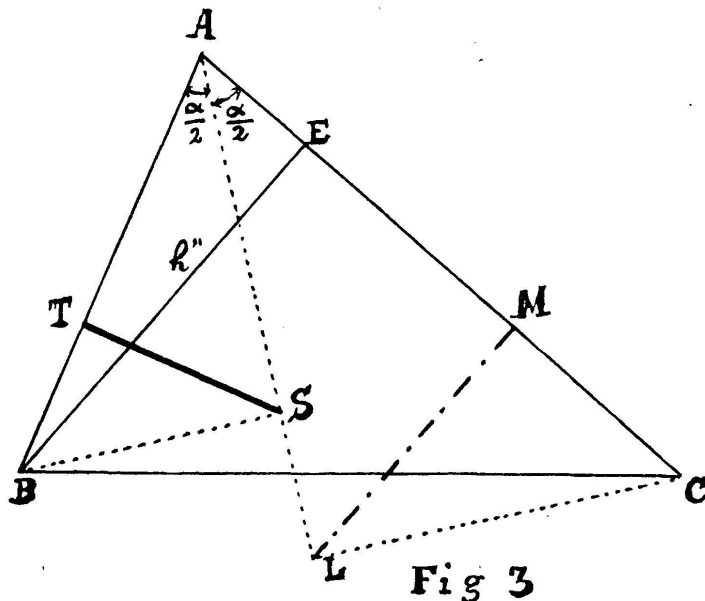
$$\frac{BE}{c} = 2 \frac{ST}{AS} \cdot \frac{AS}{c},$$

d'où

$$(6) \quad ST = \frac{BE}{2} = \frac{h''}{2} \quad \text{c. q. f. d.}$$

On aurait de même

$$LM = \frac{h'''}{2}.$$



d'où

$$(7) \quad \begin{cases} e = \frac{c + b''}{2}, \\ f = \frac{c - b''}{2}, \end{cases} \quad \text{car } f = c - e$$

En outre...

Par suite, T est le point milieu de BP et puisque S est situé sur le cercle décrit sur AB comme diamètre, on aboutit à la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Si avec un sommet A d'un triangle quelconque comme centre et sa distance au pied E de la hauteur BE comme rayon on décrit un arc de cercle coupant le côté AB en P et qu'on élève au point milieu T du segment BP une perpendiculaire à AB sur laquelle on porte la moitié de la hauteur considérée BE, l'extrémité obtenue S appartient à la bissectrice de l'angle A et au cercle décrit sur le côté AB comme diamètre.*

Remarque. — Dans le cas où l'angle A que traverse la bissectrice est obtus, la propriété reste la même, mais le point P tel que $AP = AE$ doit être pris sur le prolongement du côté AB.

Formons le produit $e \cdot f$ (fig. 4) :

$$e \cdot f = \frac{c^2 - b''^2}{4}.$$

Mais

$$d = e \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad d = f \cdot \operatorname{tg} \left(90 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

d'où

$$d^2 = e \cdot f.$$

Remplaçons

$$d^2 = \frac{c^2 - b''^2}{4}.$$

Or

$$d = \frac{h''}{2},$$

donc

$$\frac{h''^2}{4} = \frac{c^2 - b''^2}{4},$$

d'où

$$c^2 = h''^2 + b''^2 \quad \text{théorème de Pythagore.}$$

F. — *Application des relations entre les éléments d'un triangle rectangle. (Dédution des théorèmes du triangle rectangle.)* — Soit ABC un triangle rectangle en A, p la projection de b sur l'hypoténuse a et q celle de c , h la hauteur.

Ces relations sont les suivantes :

1. *Chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multi-*

pliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle compris.

2. Chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier.

D'après la première relation, on a :

$$b = a \cdot \cos C, \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{\cos C},$$

d'où

$$(8) \quad b^2 = a \cdot p,$$

c'est-à-dire :

I. Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.

D'après la seconde relation :

$$h = p \cdot \operatorname{tg} C \quad \text{et} \quad h = q \cdot \operatorname{tg} B$$

d'où

$$h^2 = p \cdot q \cdot (\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} B),$$

mais

$$\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} B = 1,$$

par suite

$$(9) \quad h^2 = p \cdot q,$$

ou

II. La hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

G. — Application du théorème du sinus. (Dédution des théorèmes de Ceva et de Ménélaüs.)

1. Appliquons le théorème du sinus aux six triangles :

PA'B, PB'C, PC'A; PA'C, PB'A, PC'B (fig. 5) :

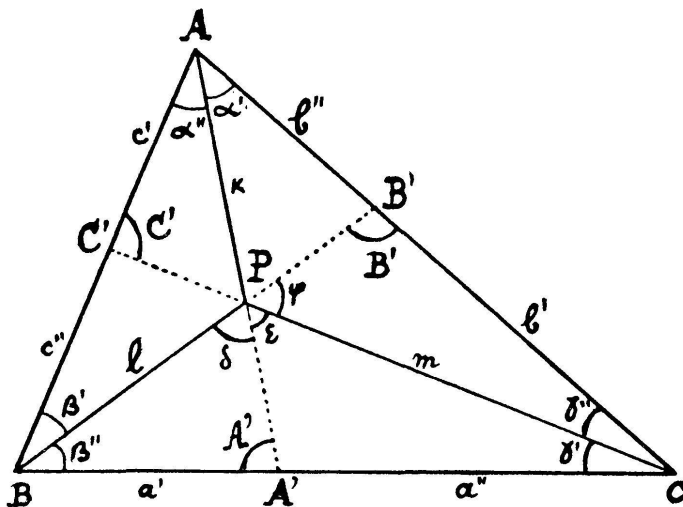


Fig 5.

$$\frac{a'}{l} = \frac{\sin \delta}{\sin A'}, \quad \frac{b'}{m} = \frac{\sin \varphi}{\sin B'}, \quad \frac{c'}{k} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin C'};$$

d'où

$$1) \quad \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{k \cdot l \cdot m} = \frac{\sin \delta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi}{\sin A' \cdot \sin B' \cdot \sin C'} ;$$

et

$$\frac{m}{a''} = \frac{\sin A'}{\sin \varepsilon} , \quad \frac{k}{b''} = \frac{\sin B'}{\sin \delta} , \quad \frac{l}{c''} = \frac{\sin C'}{\sin \varphi} ;$$

d'où

$$2) \quad \frac{k \cdot l \cdot m}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = \frac{\sin A' \cdot \sin B' \cdot \sin C'}{\sin \delta \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi} .$$

Multiplions 1) et 2) membre à membre :

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = 1$$

d'où résulte

$$(10) \quad a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c'' .$$

C'est la relation du

THÉORÈME DE CÉVA. — *Trois transversales issues des trois sommets d'un triangle quelconque et se coupant en un même point déterminent sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.*

Remarque. — En appliquant le théorème du sinus aux six triangles :

$$ABA' , BCB' , CAC' ; \quad ACA' , BAB' , CBC' ,$$

on aboutirait aussi à la relation du théorème de Céva. On obtiendrait :

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a'' \cdot b'' \cdot c''} = \frac{\sin \alpha'' \cdot \sin \beta'' \cdot \sin \gamma''}{\sin \beta' \cdot \sin \gamma' \cdot \sin \alpha'} = \frac{l \cdot m \cdot k}{k \cdot l \cdot m}$$

d'où

$$a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c'' .$$

Cas particulier. — En exprimant, dans un triangle quelconque, l'un quelconque des produits

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma , & \quad \sec \alpha \cdot \sec \beta \cdot \sec \gamma , \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma , & \quad \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \cdot \operatorname{cotg} \gamma , \end{aligned}$$

de deux manières différentes et en égalant les deux expressions, on arrive à la relation du *théorème de Céva* pour le cas particulier où les transversales issues des sommets se coupent à l'orthocentre du triangle.

En effet (fig. 1) :

$$\cos \alpha = \frac{c'}{b} = \frac{b''}{c}; \quad \cos \beta = \frac{a'}{c} = \frac{c''}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{b'}{a} = \frac{a''}{b}.$$

Par suite

$$\cos \alpha \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{c'}{b} \cdot \frac{a'}{c} \cdot \frac{b'}{a} = \frac{b''}{c} \cdot \frac{c''}{a} \cdot \frac{a''}{b}$$

d'où

$$a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c''.$$

2. Considérons un triangle ABC et une transversale coupant les côtés a , b , c respectivement aux points X, Y, Z et formant avec eux les angles δ , ε , φ (fig. 6).

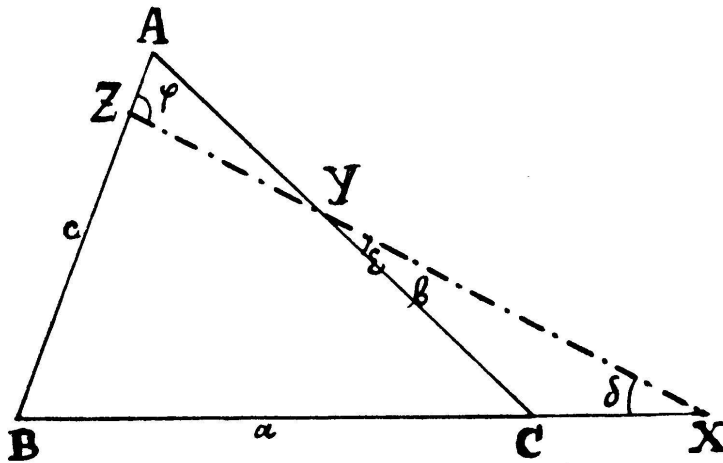


Fig 6.

D'après le théorème du sinus appliqué aux triangles AYZ, BZX, CXY, nous avons successivement (fig. 6) :

$$\frac{AY}{AZ} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon}; \quad \frac{BZ}{BX} = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}; \quad \frac{CX}{CY} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta}.$$

Multiplions ces trois relations membre à membre :

$$\frac{AY \cdot BZ \cdot CX}{AZ \cdot BX \cdot CY} = 1,$$

d'où

$$(11) \quad AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot CX \cdot BZ$$

c'est-à-dire

THÉORÈME DE MÉNÉLAÛS. — *Toute transversale située dans le plan d'un triangle détermine sur les côtés six segments tels que les produits de trois segments non consécutifs sont égaux.*

H. — Application du théorème du cosinus. (Dédution des théorèmes de Ptolémée.) — La figure 7 donne :

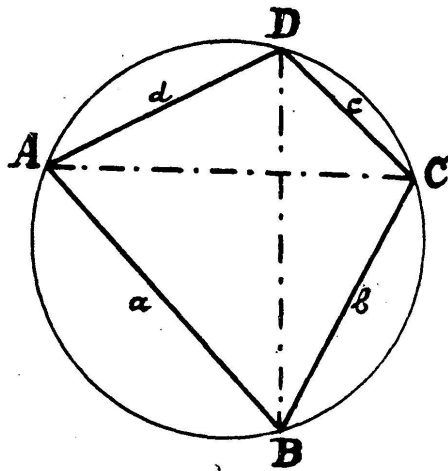


Fig 7.

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B ,$$

et

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos B ,$$

d'où

$$\frac{a^2 + b^2 - \overline{AC}^2}{2ab} = \frac{\overline{AC}^2 - c^2 - d^2}{2cd} .$$

De cette relation on tire :

$$1) \quad AC = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}} .$$

On trouverait de même :

$$2) \quad BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} .$$

En multipliant les relations 1) et 2), puis en les divisant membre à membre, on obtient :

$$(12) \quad \left. \begin{array}{l} AC \cdot BD = ac + bd \\ \frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire

THÉORÈMES DE PTOLÉMÉE. — 1. Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

2. Dans tout quadrilatère inscriptible, les diagonales sont entre elles dans le même rapport que les sommes des produits des côtés qui concourent avec elles.