Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 17 (1915)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Autor: Gonggryp, B.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16319

II

Tàchons de démontrer qu'à l'équation :

$$F(x) \equiv x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

peut satisfaire une valeur de x comme : $x = u + iv$.

On sait que :

$$F(u + iv) = F(u) + iv F^{I}(u) - \frac{v^2}{1\,.\,2} F^{II}(u) - i \frac{v^3}{1\,.\,2\,.\,3} F^{III}(u) \ldots$$

$$+ \frac{(iv)^{2n}}{1 \ldots 2n} F^{[2n]}_{(u)} .$$

Cette équation $F(u + iv) = 0$ pourra se vérifier, si simultanément :

$$F(u) - \frac{v^2}{1\,.\,2} F^{II}(u) + \frac{v^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} F^{IV}(u) - \frac{v^6}{1 \ldots 6} F^{VI}(u) \ldots$$

$$\pm \frac{v^{2n}}{1 \ldots 2n} F^{[2n]}_{(u)} = 0 \tag{4}$$

et

$$F^{I}(u) - \frac{v^2}{1\,.\,2\,.\,3} F^{III}(u) + \frac{v^4}{1 \ldots 5} F^{V}(u) - \frac{v^6}{1 \ldots 7} F^{VII}(u) \ldots$$

$$\mp \frac{v^{2n-2}}{1 \ldots (2n-1)} F^{[2n-1]}_{(u)} = 0 . \tag{5}$$

Les premiers membres de ces deux équations sont des fonctions de v^2; s'il y a une valeur $v = v_1$, satisfaisant aux conditions exposées ci-dessus, il y aura de même une valeur $v = -v_1$; d'où il s'ensuit qu'une équation du $2n^{\text{ième}}$ degré ayant une racine $x = u + iv$, en possède aussi une autre : $x = u - iv$.

En posant : $v^2 = v'$, (4) et (5) deviennent :

$$U_0 v'^{n} + U_2 v'^{n-1} + U_4 v'^{n-2} + \ldots + U_{2n-2} v' + U_{2n} = 0 \tag{4a}$$

et

$$U_1 v'^{n-1} + U_3 v'^{n-2} + U_5 v'^{n-3} + \ldots + U_{2n-3} v' + U_{2n-1} = 0 . \tag{5a}$$

(On voit que U_h est une fonction du $h^{\text{ième}}$ degré par rapport à u.) De l'élimination de v' entre (4_a) et (5_a) il résulte une équation en u représentée par le déterminant qui se trouve ci-dessous. Quant au degré de cette équation-ci, c'est celui d'un terme quelconque, par exemple, celui de la diagonale : $U_1^n U_{2n}^{n-1}$; c'est-à-dire :

$$n + 2n(n-1) = n(2n-1) .$$

Donc, encore une fois, si le degré de l'équation proposée ne contient qu'un seul facteur 2, celui de l'équation finale sera *impair*, d'où suit une valeur *réelle* de u ; ensuite (4_a) et (5_a) donneront une valeur réelle de v', c'est-à-dire de v^2; la réalité de v dépendra encore du signe de cette valeur de v^2, mais n'a rien à faire avec la conclusion qu'il est permis de tirer de ces faits : qu'il y a actuellement des valeurs de u et de v, de sorte que $u + iv$ représente une racine de $F(x) = 0$.

$$\begin{vmatrix}
U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & U_1 & U_3 & \cdots & U_{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & U_{2n-1} \\
U_0 & U_2 & U_4 & \cdots & U_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & U_0 & U_2 & \cdots & \cdots & U_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & U_0 & U_2 & \cdots & \cdots & U_{2n} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & U_{2n}
\end{vmatrix} = 0 .$$

Ensuite, si dans le nombre $2n$ il existe plus d'un facteur 2, on peut appliquer le même procédé à l'équation résultante en u, en posant :

$$u = u_1 + iv_1 .$$

L'équation résultante en u aura alors dans son degré *deux facteurs 2 de moins* que l'équation proposée. Posant pour aller plus loin $u_1 = u_2 + iv_2$, etc., on obtiendra enfin une résultante par exemple en u_p, dont le degré est un nombre *impair*, laquelle aura donc une racine réelle.

Alors nous aurons posé successivement :

$$x = u + iv \ ,$$

$$u = u_1 + iv_1 \ ,$$

$$u_1 = u_2 + iv_2 \ ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{p-1} = u_p + iv_p \ ;$$

d'où

$$x = u_p + i(v + v_1 + \ldots v_p) = u_p + i\mathrm{V} \ ,$$

en sachant qu'il existe actuellement une valeur réelle de u_p. Or, dans ce cas, nous avons vu ci-dessus qu'il y a aussi une valeur réelle pour V^2 et par conséquent une valeur ou réelle ou imaginaire de V, satisfaisant aux conditions nécessaires; en d'autres termes :

Une équation du 2nième *degré possède en tout cas une racine, soit réelle, soit complexe.*

Vérification et application des résultats obtenus.

Prenons pour exemple l'équation du quatrième degré :

$$x^4 + \mathrm{A}_1x^3 + \mathrm{A}_2x^2 + \mathrm{A}_3x + \mathrm{A}_4 = 0 \ .$$

1° Nous pouvons supposer que le premier membre est égal au produit :

$$(x^2 - px - q)(x^2 + a_1x + a_2) \ .$$

D'après les formules du système (A) on obtiendra :

$$(2p + \mathrm{A}_1)q + p^3 + \mathrm{A}_1p^2 + \mathrm{A}_2p + \mathrm{A}_3 = 0$$

et

$$q^2 + (3p^2 + 2\mathrm{A}_1p + \mathrm{A}_2)q + p^4 + \mathrm{A}_1p^3 + \mathrm{A}_2p^2 + \mathrm{A}_3p + \mathrm{A}_4 = 0 \ .$$

L'élimination de q conduit à l'équation du sixième degré :

$$(2p + \mathrm{A}_1)^2(p^4 + \mathrm{A}_1p^3 + \mathrm{A}_2p^2 + \mathrm{A}_3p + \mathrm{A}_4) + (p^3 + \mathrm{A}_1p^2 + \mathrm{A}_2p + \mathrm{A}_3)^2$$
$$- (p^3 + \mathrm{A}_1p^2 + \mathrm{A}_2p + \mathrm{A}_3)(3p^2 + 2\mathrm{A}_1p + \mathrm{A}_2)(2p + \mathrm{A}_1) = 0 \ . \qquad (6)$$

L'expression $n(2n - 1)$ se vérifie donc, car : $2(4 - 1) = 6$.

Ensuite, en supposant $\mathrm{A}_1 = 0$, l'équation (6) se réduit à :

$$p^6 + 2\mathrm{A}_2p^4 + (\mathrm{A}_2^2 - 4\mathrm{A}_4)p^2 - \mathrm{A}_3^2 = 0 \ . \qquad (7)$$

c'est-à-dire précisément à l'équation auxiliaire de la méthode de *Descartes,* à quoi il fallait s'attendre.

2° On peut poser :

$$x = u + iv .$$

D'après les formules (4) et (5) les inconnues u et v seront données par :

$$u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4 - v^2(6u^2 + 3A_1 u + A_2) + v^4 = 0$$

et

$$4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3 - v^2(4u + A_1) = 0 .$$

L'élimination de v^2 conduit à l'équation du sixième degré :

$$(4u + A_1)^2 (u^4 + A_1 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + A_4) + (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3)^2$$
$$- (4u^3 + 3A_1 u^2 + 2A_2 u + A_3)(6u^2 + 3A_1 u + A_2)(4u + A_1) = 0 .$$

Dans le cas où $A_1 = 0$, cette équation devient :

$$u^6 + \frac{A_2}{2} u^4 + \frac{A_2^2 - 4A_4}{16} u^2 - \left(\frac{A_3}{8}\right)^2 = 0. \qquad (8)$$

Celle-ci est précisément l'équation auxiliaire de la méthode de résolution d'*Euler*. Les deux équations, le signe du terme connu étant négatif, auront chacune deux racines égales, l'une affectée du signe $+$, l'autre du signe $-$.

Remarque. Dans la seconde démonstration, on a cherché pour x une valeur $x = u + iv$; or, puisque cette racine est en tout cas accompagnée d'une autre $x = u - iv$, cette recherche revient tout à fait au même que l'investigation d'un facteur quadratique :

$$\left\{(x - u) - iv\right\} \left\{(x - u) + iv\right\} = x^2 - 2ux + u^2 + v^2 .$$

La comparaison de cette expression avec

$$x^2 - px - q ,$$

employée dans la première démonstration nous fait conclure a priori que l'équation finale en u aura des racines dont chacune est la moitié d'une racine de l'équation à laquelle p doit satisfaire (première démonstration).

Cette conclusion se vérifie complètement par (7) et (8).

Note sur la formation des équations finales de la première démonstration.

Nous nous servirons de la *notation* :

$$F_h(p) = p^h + A_1 p^{h-1} + A_2 p^{h-2} + \dots + A_{h-1} p + A_h \qquad (9)$$

donc

$$F_{h+1}(p) = p^{h+1} + A_1 p^h + A_2 p^{h-1} + \dots + A_h p + A_{h+1} ,$$

d'où

$$F_{h+1}(p) = pF_h(p) + A_{h+1} . \qquad (10)$$

De (10) on peut déduire :

$$F'_{h+1}(p) = pF'_h(p) + F_h(p) ; \qquad (11)$$

de même

$$F'_h(p) = pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p) . \qquad (12)$$

En poursuivant de (12) nous tirons :

$$F''_h(p) = pF''_{h-1}(p) + 2F'_{h-1}(p) ; \qquad (13)$$

en général :

$$F_h^{[m]}(p) = pF_{h-1}^{[m]}(p) + mF_{h-1}^{[m-1]}(p) . \qquad (14)$$

Maintenant nous pouvons démontrer qu'une inconnue quelconque a_h du système (A) peut être représentée ainsi :

$$a_h = F_h(p) + qF'_{h-1}(p) + \frac{q^2}{1.2} F''_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1.2.3} F^{[3]}_{h-3}(p) + \dots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \, . \, . \, \frac{h}{2}} F_{\frac{h}{2}}^{\left[\frac{h}{2}\right]}(p) . \qquad (15)$$

Cette formule se rapporte au cas où h est un nombre *pair ;* h étant impair, la puissance la plus élevée de l'inconnue q sera $\frac{h-1}{2}$.

Pour démontrer la formule (15) nous ferons voir qu'elle est vraie pour a_{h+1}, si elle se vérifie pour a_{h-1}, et pour a_h. A (15) nous ajoutons donc :

$$a_{h-1} = F_{h-1}(p) + qF'_{h-2}(p) + \frac{q^2}{1\,.\,2} F''_{h-3}(p) + \frac{q^3}{1\,.\,2\,.\,3} F^{[3]}_{h-4}(p) + \dots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h-2}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F^{\frac{[h-2]}{2}}_{\frac{h}{2}}(p) \,. \tag{16}$$

Or, d'après le système (A)

$$a_{h+1} = pa_h + qa_{h-1} + A_{h+1} \,.$$

Donc a_{h+1} se trouve en ajoutant ensemble les expressions suivantes :

$$A_{h+1} + pF_h(p) + pqF'_{h-1}(p) + p\frac{q^2}{1\,.\,2} F^{[2]}_{h-2}(p) + p\frac{q^3}{1\,.\,2\,.\,3} F^{[3]}_{h-3}(p) + \dots$$

$$+ p\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1\,.\,2 \dots \frac{h}{2}} F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p)$$

$$qF_{h-1}(p) + q^2F'_{h-2}(p) + \frac{q^3}{1\,.\,2} F^{[2]}_{h-3}(p) + \dots + \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1 \dots \frac{h-2}{2}} F^{\left[\frac{h-2}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p) \,.$$

Les termes consécutifs de la formule résultante seront :

$$A_{h+1} + pF_h(p) = F_{h+1}(p) \qquad \text{voir (10)}$$

$$q\left\{pF'_{h-1}(p) + F_{h-1}(p)\right\} = qF'_h(p) \qquad \text{» (12)}$$

$$\frac{q^2}{1\,.\,2}\left\{pF^{[2]}_{h-2}(p) + 2F'_{h-2}(p)\right\} = \frac{q^2}{1\,.\,2} F^{[2]}_{h-1}(p) \qquad \text{» (13)}$$

. . . .

$$\frac{q^{\frac{h}{2}}}{1\,.\,2 \dots \frac{h}{2}}\left\{pF^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}}(p) + \frac{h}{2} F^{\left[\frac{h}{2}-1\right]}_{\frac{h}{2}}(p)\right\} = \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1\,.\,2 \dots \frac{h}{2}} F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p) \qquad \text{» (14)}$$

Il en résulte :

$$a_{h+1} = F_{h+1}(p) + qF'_h(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{h-1}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{[3]}_{h-2}(p) \cdots$$

$$+ \frac{q^{\frac{h}{2}}}{1.2\ldots\frac{h}{2}} F^{\left[\frac{h}{2}\right]}_{\frac{h}{2}+1}(p),$$

c'est-à-dire précisément ce qu'il fallait démontrer.

Or, une simple vérification montrant que la formule est juste en posant $h = 1$ et $h = 2$, la vérité en est prouvée pour toute valeur entière de h.

Nous avons donc par exemple :

$$a_{2n-3} = F_{2n-3}(p) + qF'_{2n-4}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{2n-2}(p) + \ldots + \frac{q^{n-2}}{1\ldots(n-2)}F^{[n-2]}_{n-1}(p);$$

$$a_{2n-2} = F_{2n-2}(p) + qF'_{2n-3}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{2n-4}(p) + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1\ldots(n-1)}F^{[n-1]}_{n-1}(p).$$

De :

$$a_{2n-2}p + a_{2n-3}q + A_{2n-1} = 0 \qquad (\text{ou} \quad a_{2n-1} = 0)$$

il en résulte : (16)

$$F_{2n-1}(p) + qF'_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{2n-3}(p) + \ldots + \frac{q^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{[n-1]}_n(p) = 0,$$

tandis que

$$a_{2n-2}q + A_{2n} = 0$$

peut se remplacer par :

$$qF_{2n-2}(p) + \frac{q^2}{1.2}F'_{2n-3}(p) + \frac{q^3}{1.2.3}F^{[2]}_{2n-4}(p) + \ldots$$

$$+ \frac{q^n}{1\ldots(2n-1)}F^{[n-1]}_{n-1}(p) + A_{2n} = 0. \qquad (17)$$

Enfin, $p \times (16) + (17)$ nous donne l'équation

$$F_{2n}(p) + qF'_{2n-1}(p) + \frac{q^2}{1.2}F^{[2]}_{2n-2}(p) + \ldots + \frac{q^n}{1.2\ldots n}F^{[n]}_n(p) = 0, \qquad (18)$$

que l'on peut trouver immédiatement en considérant $a_{2n} = 0$.

Les équations finales sont d'après ce qui précède (16) et (18). Elles donnent directement les équations particulières qui nous ont servi à déduire, dans notre vérification et application, les résolvantes de Descartes et d'Euler.