Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18035

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2}-1 < x < -(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{\sqrt{2}+1} .$$

En posant

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = (x^2 + 1 - 2\mu)^2 ,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu + 1)x^2 - 2x + 1 + \mu - \mu^2 = 0 ,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3 - 2\mu = \square .$$

Le problème de TORRICELLI *est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants* $g_2 = 8$, $g_3 = 0$.

Cette équation $\mu^3 - 2\mu = \square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3 + 8\lambda = \square$ par la substitution :

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} .$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de BRAHMAGUPTA-FERMAT, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x = x_0 + ky$, celui-ci se change en un polynôme $y \cdot g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de FERMAT $f(x) = \square$ devient ainsi $y \cdot g(y) = \square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(\mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y + \mathrm{C}) = \square ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux, mais dont le plus grand diviseur commun n'a que des facteurs premiers à la première puissance.

L'indéterminée y est un nombre rationnel ; soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible qui lui est égale. L'équation précédente peut alors être écrite :

$$PQ(AP^2 + BPQ + CQ^2) = \square .$$

Sous cette forme, on voit que tout facteur premier de P, qui n'entre pas sous une puissance paire, dans la composition factorielle de ce nombre P doit être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient C. De même, tout facteur premier de Q, qui ne figure pas sous une puissance paire dans la décomposition de Q, doit aussi être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient A.

Soit donc α un diviseur quelconque, à facteurs premiers simples, du coefficient A et γ un diviseur quelconque, de même nature, du coefficient C ; soient A′ et C′ les quotients de A par α et de C par γ :

$$A = \alpha A' , \qquad C = \gamma C' ;$$

en se bornant aux couples α et γ de diviseurs qui sont premiers entre eux, il y aura lieu de faire les essais de nombres P et Q des formes suivantes :

$$P = \gamma p^2 , \qquad Q = \pm \alpha q^2 ;$$

dans ces formules, p et q sont deux entiers qui doivent satisfaire à une nouvelle équation de Brahmagupta-Fermat :

$$\pm (A'\gamma p^4 + Bp^2q^2 + C'\alpha q^4) = \square ;$$

cette équation est bicarrée. Par suite :

La connaissance d'un zéro rationnel du polynôme f(x) *du premier membre d'une équation cubique de* Brahmagupta-Fermat *permet de* DÉCOMPOSER L'ÉTUDE DE CELLE-CI EN CELLES D'UN NOMBRE LIMITÉ D'ÉQUATIONS BICARRÉES DE BRAHMAGUPTA-FERMAT.

L'intérêt de cette proposition réside dans l'importance considérable des équations bicarrées de Brahmagupta-Fermat, qui ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux généraux ou spéciaux.

16. — Un cas particulier très important est celui pour lequel les coefficients A, C du trinôme du second degré se réduisent tous deux aux nombres $+1$ ou -1. Les quatre cas correspondants se réduisent effectivement à deux par un simple changement de signe de l'indéterminée y. Ce sont les deux cas :

$$y(y^2 + By \pm 1) = \square \cdot$$

L'équation correspondante

$$PQ(P^2 + BPQ + \varepsilon Q^2) = \square \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ne peut être vérifiée qu'en prenant pour P et Q des nombres rationnéls dont les valeurs absolues sont des carrés parfaits ; il y aura lieu de poser

$$P = p^2 \ , \qquad Q = \varepsilon' q^2 \qquad (\varepsilon' = \pm 1)$$

et par suite de rechercher les solutions de l'équation bicarrée

$$\varepsilon'(p^4 + \varepsilon' B p^2 q^2 + \varepsilon q^4) = \square \ .$$

Comme le signe de ε est déterminé par l'énoncé même de la question, il suffira de considérer successivement les deux équations

$$p^4 + Bp^2q^2 + \varepsilon q^4 = \square \ ,$$
$$-p^4 + Bp^2q^2 - \varepsilon q^4 = \square \ .$$

Soit, pour fixer les idées [1], l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; elle peut être mise sous la forme équivalente

$$\sin X - \cos Y = 1 \ ;$$

par définition même des équations arithmotrigonométriques, il s'agit de rechercher les solutions rationnelles $x = \operatorname{tang} \frac{X}{2}$ et $y = \operatorname{tang} \frac{Y}{2}$ de l'équation

$$\frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + y^2} \ ,$$

[1] Voir les *Notions d'arithmogéométrie*, paragraphe 74 : *L'Enseignement mathématique*, 1917, p. 240.

ou encore les arithmopoints de la cubique d'équation :

$$y^2 = x + \frac{1}{x} - 1 ;$$

cette équation

$$x(x^2 - x + 1) = \square$$

rentre dans la catégorie précédente. Elle ne peut être satisfaite que si x est au signe près un carré parfait. Mais comme le trinôme $x^2 - x + 1$ est dénué de zéros réels et garde toujours le signe positif, pour toutes les variations de x, il suffit de borner les essais au seul cas $x = z^2$; l'équation bicarrée obtenue ainsi,

$$z^4 - z^2 + 1 = \square ,$$

a été rencontrée par L. EULER[1] qui en a établi l'impossibilité, sauf pour les valeurs $z = 0, \pm 1, \pm \infty$. Par suite :

L'équation arithmotrigonométrique

$$\sin u + \sin v = 1$$

est impossible et n'admet que des solutions banales.

17. — Considérons maintenant et d'une manière analogue, une équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT du quatrième ordre $f(x) = \square$, dans laquelle le polynôme $f(x)$ du quatrième degré est ou peut être décomposé en un produit de deux polynômes quadratiques à coefficients rationnels. Prenons :

$$f(x) \equiv (Ax^2 + Bx + C)(A'x^2 + B'x + C') ;$$

les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ peuvent toujours être supposés entiers; le plus grand commun diviseur de (A, B, C) et celui de (A′, B′, C′) peuvent tous deux être supposés dépourvus de facteurs affectés d'un exposant autre que l'unité. Ces deux plus grands communs diviseurs peuvent en outre être supposés premiers entre eux.

En explicitant la valeur $\frac{P}{Q}$, supposée fraction irréductible, du nombre rationnel x, l'équation devient

$$(AP^2 + BPQ + CQ^2)(A'P^2 + B'PQ + C'Q^2) = \square .$$

[1] Id., paragraphe 88, p. 259.

Tout facteur premier de la valeur numérique de l'un des trinômes, $AP^2 + BPQ + CQ^2$ par exemple, qui se trouve engagé sous une puissance impaire dans la composition factorielle de ce nombre, doit se retrouver, et sous une puissance impaire, dans la composition factorielle de la valeur numérique de $A'P^2 + B'PQ + C'Q^2$.

Cette remarque peut surtout être utilisée avec profit. Supposons, par exemple, que l'équation à étudier soit

$$(x^2 + 1)(3 - x^2) = \square \, ,$$

ou encore

$$(P^2 + Q^2)(3P^2 - Q^2) = \square \, .$$

Un diviseur premier commun à $P^2 + Q^2$ et $3P^2 - Q^2$ devrait diviser $4P^2$, c'est-à-dire $2P$; ce facteur ne peut être un facteur de P, car il devrait diviser Q qui est premier avec P; ce facteur ne peut donc être que le nombre deux ou l'unité au signe près. Mais, le premier facteur $P^2 + Q^2$ étant essentiellement positif, la question de signe disparaît; il ne reste que deux alternatives; ou bien

$$P^2 + Q^2 = \square \quad \text{avec} \quad 3P^2 - Q^2 = \square \, ,$$

ou bien

$$P^2 + Q^2 = 2\square \quad \text{avec} \quad 3P^2 - Q^2 = 2\square \, .$$

Le premier système contient une équation impossible, $3P^2 - Q^2 = \square$, puisque le nombre trois ne saurait être somme de deux carrés (théorème de FERMAT); il reste donc le seul cas du système :

$$P^2 + Q^2 = 2\square \, , \qquad 3P^2 - Q^2 = 2\square \, .$$

En posant alors

$$P = \alpha + \beta \, , \qquad Q = \alpha - \beta \, ,$$

ce système devient le suivant, beaucoup plus symétrique :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \square \, , \qquad \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = \square \, .$$

Ce dernier système se transforme par la substitution définie par la relation

$$\frac{\alpha}{2t} = \frac{\beta}{1 - t^2}$$

en une nouvelle équation unique de BRAHMAGUPTA-FERMAT :

$$(t^2+1)^2+8t(1-t^2)=\square\ .$$

Ainsi donc l'équation primitivement considérée a été transformée en une équation du même degré ; en réalité, la question a fait un grand pas vers sa solution, car alors que l'équation donnée, c'est-à-dire l'équation

$$3+2x^2-x^4=\square\ ,$$

n'appartient pas à l'un des types connus de résolubilité, à la nouvelle équation

$$t^4-8t^3+2t^2+8t+1=\square\ ,$$

au contraire, il est possible d'appliquer les méthodes de FERMAT et cette application des méthodes générales peut être effectuée pour l'une ou l'autre des deux termes extrêmes de l'équation.

Le mieux est d'égaler le polynôme du premier membre au carré du trinôme $t^2+4zt+1$; l'équation restante, du second degré en t,

$$(z+1)t^2+2z^2t+z-1=0\ ,$$

ne saurait avoir de racine rationnelle puisque l'équation

$$z^4-z^2+1=\square$$

est impossible.

Ce dernier résultat tient au fait que l'équation

$$(x^2+1)(3-x^2)=\square$$

est transformée en l'équation

$$X^4-(2X+2)^2=\square$$

par la substitution homographique

$$x=1+\frac{2}{X}\ ;$$

l'équation transformée peut être traitée par la méthode de FERMAT, en posant :

$$X^4-4(X+1)^2=(X^2-2\lambda)^2\ ;$$

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square .$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square , \qquad X^2 - 2X - 2 = \square ,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de FERMAT a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square .$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de FERMAT pouvait fort bien se présenter à TORRICELLI sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de DIOPHANTE et non les formules de BRAHMAGUPTA, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de DIOPHANTE,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} a , \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2} a ,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square .$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les