

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUE SUR L'INTÉGRALE  $\int uv \, dx$   
**Autor:** Petrovitch, M. Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18036>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \dots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de FERMAT des principes généraux relatifs aux équations de BRAHMAGUPTA-FERMAT, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de TORRICELLI; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de FERMAT et d'EV. TORRICELLI à l'analyse de LAGRANGE et d'EULER.

Paris, le 5 février 1918.

---

## REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv dx$

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

---

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction  $u$  de la variable  $x$  telle que l'intégrale définie

$$I = \int_0^{\infty} uv dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme  $v$  en  $x$ .*

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions  $u$  de  $x$  pour lesquelles l'intégrale (1) a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme  $v$  en  $x$  à coefficients nombres algébriques (entiers, com-*

mesurables ou irrationnels algébriques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs).

Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \tag{2}$$

la racine carrée  $\sqrt{x}$  ayant sa détermination positive.

En effet, la formule connue

$$B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz \quad (z = 1, 2, 3, \dots) \tag{3}$$

où  $B_2, B_4, B_6, \dots$  désignent les nombres de Bernoulli, par le changement  $z^2 = x$  se transforme en

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lambda_n \pi^{2(n+1)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{5}$$

où

$$\lambda_n = 2^{2n+1} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1}, \quad \lambda_0 = 2B_2 = \frac{1}{3} \tag{6}$$

Si donc

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p$$

est un polynôme en  $x$  arbitraire, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx = \pi Q(\pi^2), \tag{7}$$

où  $Q(x)$  désigne le polynôme

$$Q(x) = a_0 \lambda_0 + a_1 \lambda_1 x + a_2 \lambda_2 x^2 + \dots + a_p \lambda_p x^p.$$

Lorsque les  $a_k$  sont des nombres algébriques, les  $a_k \lambda_k$  le sont également. L'équation algébrique  $Q(x) = 0$  ne pouvant

avoir comme racine le nombre  $\pi^2$ , l'intégrale (7) est finie, déterminée et essentiellement différente de zéro.

On peut, à l'aide de la fonction (2), former une multitude de fonctions  $u$  pour lesquelles l'intégrale (1) jouira de la propriété précédente. Il suffit, par exemple, de se rappeler l'existence de fonctions  $u$  de  $x$  telles que l'intégrale (1) est *identiquement nulle quel que soit le polynôme  $v$  en  $x$* . Telles seraient les fonctions signalées par Stieltjes

$$u = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt[4]{x}} \cos \sqrt[4]{x},$$

ainsi qu'une foule d'autres, pour lesquelles on a

$$\int_0^{\infty} ux^n dx = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En désignant une pareille fonction (ou une combinaison linéaire homogène de ces fonctions) par  $U$  et en prenant

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} + U,$$

l'intégrale (1) sera finie, déterminée et *différente de zéro* quel que soit le polynôme  $v$  à coefficients nombres *algébriques*.