Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMBINAISONS DÉTERMINANTES

Autor: Helmis, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18037

COMBINAISONS DÉTERMINANTES

PAR

Jean HELMIS (Athènes).

Considérons un tableau de $\mu . \nu$ objets, ordonnés en ν lignes et en μ colonnes :

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\mu} \end{array}$$

J'appelle *combinaisons déterminantes* de ces $\mu . \nu$ objets ν à ν les différents groupes que l'on peut former avec ces $\mu . \nu$ objets en prenant un objet de la première ligne, un autre de la deuxième et ainsi de suite, et enfin un autre encore de la $\nu^{\text{ième}}$, c'est-à-dire les différents groupes de la forme

$$\alpha_{\varkappa_1\lambda_1} \alpha_{\varkappa_2\lambda_2} \cdots \alpha_{\varkappa_\nu\lambda_\nu} \tag{1}$$

où $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ représentent une permutation des indices des lignes 1, 2, 3 ... ν et $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$, ν quelconques des indices des colonnes 1, 2, 3 ... μ. Dans ces groupes on n'a pas égard à la disposition des objets, par exemple les groupes :

$$\alpha_{11} \;\; \alpha_{21} \;\; \alpha_{31} \cdots \alpha_{\nu 1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{21} \;\; \alpha_{11} \;\; \alpha_{31} \cdots \alpha_{\nu 1}$$

seront les mêmes, ou bien on ne considère pas les groupes de la seconde forme.

Pour plus grande clarté je donne aux indices $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ de la forme générale (1), la série canonique 1.2.3 ... ν lorsque la forme générale des termes devient

$$\alpha_{1\lambda_1} \alpha_{2\lambda_2} \cdots \alpha_{\nu\lambda_\nu} \tag{2}$$

où $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$ représentent ν quelconques des nombres 1.2.3 ... μ.

Je désignerai en général par[1] $O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu}$ le nombre des combinaisons déterminantes de $\mu.\nu$ objets ν à ν, et je chercherai à les trouver.

Soit, au commencement, $\mu = 3$ et $\nu = 2$, savoir soit

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{matrix}$$

le tableau des objets donnés; il est évident que, pour trouver les combinaisons déterminantes de ces objets 2 à 2, il suffit de combiner chaque objet de la première ligne à chacun de la seconde. Je trouve ainsi les groupes :

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23} \\ \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{12}\alpha_{22} & \alpha_{12}\alpha_{23} \\ \alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{13}\alpha_{23} \end{matrix}$$

qui sont au nombre de 9, savoir 3^2, et par conséquent

$$O\Sigma_2^{3.2} = 3^2 .$$

De même façon je traite le cas où j'aurai $\mu = 3$ et $\nu = 3$, c'est-à-dire lorsque le tableau des objets donnés est le suivant :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}$$

savoir, je compose au commencement les combinaisons déterminantes de deux premières lignes 2 à 2 et ensuite j'ajoute à la fin de chacune d'elles l'objet α_{31}, ensuite l'objet α_{32} et enfin l'objet α_{33}; ainsi j'aurai $9 + 9 + 9$ groupes, c'est-à-dire 3^3.

Je dis que ces groupes sont différents, ceux qui résultent de même combinaison déterminante, différant par le dernier objet, et ceux qui résultent de différentes combinaisons déterminantes, différant par eux-mêmes. Ces groupes sont toutes les combinaisons déterminantes de 3.3 objets 3 à 3, car si l'on imagine une manquante et si l'on retranche d'elle le dernier objet, on aura une combinaison déterminante de 3.2 objets 2 à 2. Mais elles sont toutes examinées, celle aussi qui peut-être manquait. Par suite on a

$$O\Sigma_3^{3.3} = 3^3 .$$

[1] ΟΣ, c'est-à-dire Ὁρίζοντες Συνδιασμοί.

Considérons maintenant le cas où $\mu = 4$ et $\nu = 2$, c'est-à-dire soit :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{matrix}$$

le tableau donné.

On voit comment nous pouvons trouver les combinaisons déterminantes de ces objets 2 à 2; il suffit de combiner chaque objet de la première ligne à chacun de la seconde; nous trouverons alors les groupes suivants :

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23} & \alpha_{11}\alpha_{24} \\ \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{12}\alpha_{22} & \alpha_{12}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{24} \\ \alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{13}\alpha_{24} \\ \alpha_{14}\alpha_{21} & \alpha_{14}\alpha_{22} & \alpha_{14}\alpha_{23} & \alpha_{14}\alpha_{24} \end{matrix}$$

qui sont $4 + 4 + 4 + 4$, c'est-à-dire 4^2, d'où $O\Sigma_2^{4.2} = 4^2$. De là je conclus la formule générale

$$O\Sigma_\nu^{\mu.\nu} = \mu^\nu \, .$$

Pour démontrer cette formule générale, je démontrerai que si elle est vraie pour une valeur quelconque de ν, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité. Et pour μ aussi.

Soit donc la formule ayant lieu pour la valeur $\nu - 1$, c'est-à-dire soit que

$$O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)} = \mu^{\nu-1} \, .$$

Si j'ajoute au tableau des objets donnés

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots \alpha_{2\mu} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \alpha_{\nu-1,1} & \alpha_{\nu-1,2} & \cdots \alpha_{\nu-1,\mu} \end{matrix}$$

une ligne encore, pour trouver les combinaisons déterminantes ν à ν du nouveau tableau, il suffit à la fin de chacun des $O\Sigma_\nu^{\mu(\nu-1)}$ d'ajouter le premier objet de la nouvelle ligne, après le second et ainsi de suite jusqu'au $\mu^{\text{ième}}$; ainsi j'aurai $\mu.\mu^{\nu-1}$, savoir μ groupes.

Ces groupes sont l'ensemble des combinaisons déterminantes des objets du nouveau tableau ν à ν, car chacun d'eux renferme ν des objets du tableau, un de chaque ligne; ils diffèrent les uns des autres, car ceux qui résultent du même $O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)}$ diffèrent par le dernier objet, et ceux qui résultent de différents, diffèrent par eux-mêmes; enfin ces groupes sont tous les $O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu}$, car si l'on s'imagine une manquante, et si l'on retranche d'elle le dernier objet, on aura une de $O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)}$, mais toutes sont examinées et à la fin de chacune sont portés successivement tous les objets de la nouvelle ligne. Ainsi celle qui, peut-être, manquait est considérée. Par suite

$$O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu} = \mu^{\nu} .$$

J'établirai maintenant que, si la formule considérée est vraie pour une valeur quelconque de μ, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité.

Soit donc la formule ayant lieu pour la valeur $\mu - 1$, c'est-à-dire soit

$$O\Sigma_{\nu}^{(\mu-1).\nu} = (\mu - 1)^{\nu} .$$

Si j'ajoute au tableau des objets donnés une colonne encore, j'aurai :

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1,\mu-1} & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,\mu-1} & \alpha_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & \cdots & \alpha_{\nu,\mu-1} & \alpha_{\nu\mu} \end{array}\right. \qquad (\mu\nu)$$

Je cherche à trouver l'ensemble de combinaisons déterminantes de ce nouveau tableau ν à ν; pour cela j'opère comme il suit: Je retranche la $\nu^{\text{ième}}$ ligne du tableau donné et je considère dans le tableau mineur l'ensemble de combinaisons déterminantes $\nu - 1$ à $\nu - 1$

$$O\Sigma_{\nu-1}^{(\mu-1)(\nu-1)} = (\mu - 1)^{\nu-1} ;$$

à la fin de chacun de ces groupes j'ajoute l'objet $\alpha_{\nu\mu}$, j'aurai ainsi $(\mu - 1)^{\nu-1}$ résultats. De la même manière j'opère pour les autres éléments de la nouvelle colonne; c'est-à-dire je retranche la $(\nu - 1)^{\text{ième}}$ ligne du tableau donné et je considère du nouveau tableau mineur l'ensemble de combinaisons déterminantes $\nu - 1$ à $\nu - 1$ et à la fin de chacun de ces groupes j'ajoute l'objet $\alpha_{\nu-1,\mu}$. J'aurai ainsi $(\mu - 1)^{\nu-1}$ nouveaux résultats, et ainsi de suite de tous les éléments de la nouvelle colonne; comme ils sont ν, j'aurai $\nu(\mu - 1)^{\nu-1}$ résultats.

Je considère maintenant les diverses combinaisons de la nouvelle colonne, qui sont $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}$, et je retranche deux lignes du tableau donné, et je trouve l'ensemble des combinaisons déterminantes $\nu-2$ à $\nu-2$ du nouveau tableau mineur de la seconde classe, qui sont $(\mu-1)^{\nu-2}$; à chacun de ces groupes (aux places convenables) j'ajoute les deux éléments correspondants de la nouvelle colonne. Ainsi je trouverai $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}$ résultats, et ainsi de suite. Enfin, si je considère les éléments de la nouvelle colonne seulement, j'aurai encore une combinaison déterminante :

$$\alpha_{1\mu}\ \alpha_{2\mu}\ \alpha_{3\mu}\ \cdots\ \alpha_{\nu\mu}\ .$$

Donc l'ensemble des combinaisons déterminantes du nouveau tableau $(\mu\nu)$ consistera en l'ensemble des combinaisons déterminantes du tableau donné $(\mu-1)^{\nu-1}$ et en les quantités

$$\nu(\mu-1)^{\nu-1}\ ,\quad \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}\ ,\quad \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}(\mu-1)^{\nu-3}\ ,\ \ldots,\ 1\ .$$

Donc l'ensemble des combinaisons déterminantes du nouveau tableau sera :

$$(\mu-1)^{\nu}+\nu(\mu-1)^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}$$
$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}(\mu-1)^{\nu-3}+\ldots+1$$

ou

$$[(\mu-1)+1]^{\nu}\ ,\qquad \text{savoir}\qquad O\Sigma_{\nu}^{\mu\nu}=\mu^{\nu}\ .$$

Je dis que ces groupes sont l'ensemble des combinaisons déterminantes ν à ν du nouveau tableau, car chacun d'eux contient ν des objets du tableau et un de chaque ligne; ils diffèrent aussi les uns des autres, car ceux qui résultent de la même expression

$$O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)}\qquad (k=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \nu-1)$$

diffèrent par les autres k objets, et ceux qui résultent de différentes $O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)}$ diffèrent par eux-mêmes. Enfin ces groupes sont toutes les combinaisons déterminantes de $\mu.\nu$ objets ν à ν, car si l'on imagine une manquante et si l'on retranche d'elle les objets de la nouvelle colonne (de la $\mu^{\text{ième}}$), qu'elle contient, on aura un groupe de

$$O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)}\qquad (k=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \nu-1)$$

mais toutes sont examinées et complétées convenablement par les objets de la nouvelle colonne, ainsi que celle qui peut-être manquait (celle qui peut-être manquait ne peut être la $\alpha_{1\mu}\,\alpha_{2\mu}\,\ldots\,\alpha_{\nu\mu}$, car celle-ci est en évidence). Nous aurons donc, en général

$$O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu} = \mu^{\nu} .$$

Et puisque cette formule est vraie pour les valeurs $\mu = 3$, $\nu = 2$ et que si elle est vraie pour une valeur de μ et ν, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité, il suit qu'elle est générale.

Athènes, 1915.

SUR LA DÉTERMINATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES ÉLASTIQUES

PAR

M. ZACK (Zurich).

L'emploi des coordonnées que M. CESÀRO a introduites en Géométrie, dans l'étude des questions se rapportant à la résistance des matériaux présenterait, à mon avis, un grand avantage. Cependant, cette tentative, à ce que je sache, n'a jamais été faite jusqu'ici. Je me propose donc dans les lignes qui suivent de montrer sur un exemple particulier, celui des lames élastiques, comment l'emploi de ces coordonnées simplifie l'étude de ce cas et permet d'obtenir des solutions aussi élégantes qu'utiles dans la pratique.

Pour déterminer un point P d'une courbe C′ correspondant d'après une relation quelconque à un point A d'une courbe C, M. CESÀRO se sert d'un *système* rectangulaire *mobile,* l'axe des x étant la tangente et l'axe des y étant la *normale* de C en A. Soient x et y, coordonnées de P, des fonctions de l'arc s de C, A′ le point de C infiniment voisin de A, P′ le point de C′ correspondant à A′, $x + \delta x$ et $y + \delta y$