

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES QUI SE PRÉSENTENT  
DANS LA THÉORIE DES TIGES ÉLASTIQUES

**Autor:** Paschoud, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18039>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES  
 QUI SE PRÉSENTENT  
 DANS LA THÉORIE DES TIGES ÉLASTIQUES

PAR

M. PASCHOUD (Lausanne).

1. — Dans leurs *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Teubner, 1909), MM. JAHNKE et EMDE donnent (p. 2 et 3) les racines de diverses équations transcendantes, parmi lesquelles se trouvent les suivantes :

où

$$\cos x \operatorname{ch} x = \pm 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x \operatorname{coth} x = -1 ,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \quad \text{et} \quad \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} .$$

Il semble intéressant de remarquer que les racines de l'équation  $\operatorname{tg} x \operatorname{coth} x = -1$  se déduisent immédiatement de celles de l'équation  $\cos x \operatorname{ch} x = 1$ , fait qui paraît avoir échappé à MM. JAHNKE et EMDE.

Plus généralement, il est facile de montrer que des racines des équations  $\cos x \operatorname{ch} x = \pm 1$ , on déduit celles des équations

$$\operatorname{tg} x \operatorname{coth} x = \pm 1 , \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x \operatorname{th} x = \pm 1 .$$

2. — Les équations transcendantes indiquées ci-dessus se présentent dans la théorie du mouvement vibratoire des tiges élastiques.

On sait que l'équation du mouvement vibratoire d'une telle tige est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 , \quad (1)$$

$y$  est l'ordonnée d'un point d'abscisse  $x$ ,  $t$  est le temps,  $k^2$  le moment d'inertie de la section de la barre,  $b^2 = E/\mu$ , où  $E$  est le module d'élasticité et  $\mu$  la masse de la tige par unité de longueur.

Pour intégrer (1), on pose

$$y = u \cos \left( \frac{kb}{l^2} m^2 t \right)$$

$u$  étant fonction d' $x$  seul;  $l$  est la longueur de la tige,  $m$  un nombre à déterminer. En portant cette expression de  $y$  dans (1), il vient pour  $u$  l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} u . \quad (2)$$

Si  $T$  est la période de vibration, on a

$$T = \frac{2\pi l^2}{kbm^2} .$$

Pour déterminer complètement  $u$ , il faut encore indiquer les conditions aux extrémités de la tige, qui sont : pour un *bout libre* :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 , \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0 ;$$

pour un *bout appuyé* :

$$u = 0 , \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 ;$$

pour un *bout encastré* :

$$u = 0 , \quad \frac{du}{dx} = 0 .$$

L'intégrale de (2) s'écrit, sous forme symétrique,

$$u = A \left( \cos \frac{mx}{l} + \operatorname{ch} \frac{mx}{l} \right) + B \left( \cos \frac{mx}{l} - \operatorname{ch} \frac{mx}{l} \right) + C \left( \sin \frac{mx}{l} + \operatorname{sh} \frac{mx}{l} \right) \\ + D \left( \sin \frac{mx}{l} - \operatorname{sh} \frac{mx}{l} \right) .$$

$A, B, C, D$  sont les constantes d'intégration qui se déterminent par les conditions aux extrémités de la tige.

Ces conditions aux extrémités donnent :  
pour une *tige libre à ses deux bouts* :

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 ,$$

pour une *tige encastrée à ses deux bouts* :

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 ,$$

pour une *tige appuyée à ses deux bouts* :

$$\sin m = 0 ,$$

pour une *tige libre à un bout, encastrée à l'autre* :

$$\cos m \operatorname{ch} m = - 1 ,$$

pour une *tige libre à un bout, appuyée à l'autre* :

$$\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1 ,$$

pour une *tige encastrée à un bout, appuyée à l'autre* :

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 .$$

On reconnaît parmi ces équations transcendantes celles dont nous avons parlé.

3. — Les deux plus importantes de ces équations,  $\cos m \operatorname{ch} m = \pm 1$  ont été étudiées par POISSON (*Mécanique*, 2<sup>e</sup> éd., t. II, p. 389 et suivantes).

Pour

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 , \tag{3}$$

POISSON remarque que lorsque  $m$  est grand,  $\operatorname{ch} m$  est très grand et positif. Donc pour que (3) soit satisfaite, il faut que  $\cos m$  soit très petit et positif, c'est-à-dire que  $m$  soit à peu près de la forme  $(2n + 1) \frac{\pi}{2}$ .

Pour  $m$  pair, la racine  $m_n$  correspondante est

$$m_n < (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

et pour  $n$  impair,

$$m_n > (2n + 1) \frac{\pi}{2} .$$

Poisson pose alors

$$m_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - (-1)^n \beta_n ,$$

où  $\beta_n$  est petit et positif et il calcule  $\beta_n$  par approximations successives. Mais les valeurs qu'il donne pour les plus petites racines de  $\cos m \operatorname{ch} m = 1$  et de  $\cos m \operatorname{ch} m = -1$  ne sont pas exactes.

Lord RAYLEIGH (*The Theory of Sound*, 2<sup>e</sup> édit., t. I, p. 277 et suivantes) a repris le calcul des racines des deux équations  $\cos m \operatorname{ch} m = \pm 1$  et, par approximations successives, il calcule les valeurs exactes de ces racines. Ce sont, pour  $\cos m \operatorname{ch} m = 1$  :

$$\begin{array}{ll} m_1 = 0 & m_2 = 4,7300408 \\ m_3 = 7,8532046 & m_4 = 10,9956078 \\ m_5 = 14,1371655 & m_6 = 17,2787596 . \end{array}$$

Au-delà, avec sept décimales exactes,

$$m_n = \frac{1}{2}(2n + 1)\pi .$$

Pour l'équation

$$\cos m \operatorname{ch} m = -1 , \tag{4}$$

Lord RAYLEIGH trouve

$$\begin{array}{ll} m_1 = 1,875104 & m_2 = 4,694098 \\ m_3 = 7,854757 & m_4 = 10,995541 \\ m_5 = 14,137168 & m_6 = 17,278759 . \end{array}$$

Au-delà,  $m_n = \frac{1}{2}(2n - 1)\pi$ , avec six décimales exactes.

4. — Des calculs analogues à ceux de Lord RAYLEIGH permettraient de trouver les racines des équations

$$\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = \pm 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} m \operatorname{th} m = \pm 1 .$$

Nous allons les déduire de celles de (3) et de (4).

5. — Partons de

$$\cos 2m \operatorname{ch} 2m = 1 ; \tag{5}$$

cette équation s'écrit

$$(2 \cos^2 m - 1)(2 \operatorname{ch}^2 m - 1) = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos^2 m} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 m} = 2$$

ou enfin

$$1 + \operatorname{tg}^2 m = 1 + \operatorname{th}^2 m ,$$

c'est-à-dire  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = \pm 1$ .

Les racines de (5) se décomposent donc en deux groupes qui sont formés respectivement par les doubles des racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1$  et de  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = -1$ .

On a ainsi, pour les racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1$

$$m_1 = 0 , \quad m_3 = \frac{7,8532046}{2} = 3,9266023 ,$$

$$m_5 = \frac{14,1371655}{2} = 7,0685825 .$$

et, au-delà,

$$m_{2n+1} = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} .$$

Les racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = -1$  sont

$$m_2 = \frac{4,7300408}{2} = 2,3650204 , \quad m_4 = \frac{10,9956078}{2} = 5,4878039$$

$$m_6 = \frac{17,2787596}{2} = 8,6393798$$

et, au-delà,

$$m_{2n} = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} .$$

Cette dernière équation  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = -1$  a été rencontrée par M. FÖPPL dans un problème concernant les vibrations propres d'un navire (*Technische Mechanik*, 4<sup>e</sup> édit., t. IV, p. 268). M. FÖPPL trouve ses racines, par tâtonnements, en se servant de tables de fonctions hyperboliques et de fonctions circulaires.

6. — La décomposition des racines de  $\cos 2m \operatorname{ch} m = 1$  en deux groupes pouvait être prévue. On sait en effet qu'une tige élastique, de longueur  $l$ , libre à ses deux bouts et qui

vibre de façon à avoir un nœud en son milieu, se partage en deux tiges, de longueur  $\frac{l}{2}$ , dont chacune vibre comme si elle avait une extrémité libre et l'autre *appuyée*.

Pour la barre entière, vibrant de la façon indiquée, il faut donner à  $m$  les valeurs des racines  $m_1, m_3, m_5 \dots$  de l'équation  $\cos m \operatorname{ch} m = 1$ .

La période  $T$  correspondant à ce mode de vibration est

$$T = \frac{2\pi l^2}{k b m^2}$$

Pour chacune des deux demi-barres, libres à un bout et appuyées à l'autre, en lesquelles la barre totale se divise, la période de la vibration est la même. Puisque la longueur de ces barres est  $\frac{l}{2}$ , pour que  $T$  ne change pas, il faut que  $m$  prenne les valeurs  $\frac{m_1}{2}, \frac{m_3}{2}, \frac{m_5}{2}, \dots$  et ces valeurs seront des racines de l'équation  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1$ , qui doit être vérifiée dans le cas d'une barre libre à un bout et appuyée à l'autre (n° 2).

7. — Comme au n° 5, on voit que l'équation

$$\cos 2m \operatorname{ch} 2m = -1 \quad (6)$$

peut s'écrire

$$\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = \pm 1 .$$

Les racines de (6) se décomposent donc aussi en deux groupes qui sont formés respectivement par les doubles des racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1$  et  $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1$ .

On a donc, pour les racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1$

$$m_1 = \frac{1,875104}{2} = 0,937552, \quad m_3 = \frac{7,854757}{2} = 3,927378$$

$$m_5 = \frac{14,137168}{2} = 7,068584$$

et, au-delà,

$$m_{2n+1} = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} .$$

Les racines de  $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1$  sont

$$m_2 = \frac{4,694098}{2} = 2,347049, \quad m_4 = \frac{10,995541}{2} = 5,497770$$

$$m_6 = \frac{17,278759}{2} = 8,639379$$

et, au-delà,

$$m_{2n} = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}.$$

8. — Si, pour plus de symétrie, on prend pour origine des coordonnées le milieu de la barre, on voit que pour une barre libre à ses deux extrémités,  $m$  doit satisfaire soit à l'équation  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1$ , soit à  $\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = -1$ .

Pour une barre libre à un bout et encastrée à l'autre, on trouve de même que  $m$  doit être solution soit de

$$\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1, \quad \text{soit de} \quad \operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1.$$

Ceci montre bien encore les relations qu'il y a entre les racines des six équations transcendantes considérées.

---

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### A propos d'un article sur la rectification approchée des arcs de cercle.

Après avoir indiqué, dans son étude sur la rectification approchée des arcs de cercle (*E. M.*, tome XX, p. 215), une dernière variante de la construction à laquelle il a été conduit, M. E. PLESKOT ajoute (p. 218) : « La valeur approchée est identique à celle qu'on obtient par la construction donnée par M. d'Ocagne. » C'est qu'en effet les deux constructions sont elles-mêmes identiques. Il suffit, pour s'en convaincre, de compléter la fig. 4 de la page 217 en appelant P le point de rencontre de la droite AC et du cercle K,