

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1918)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** G.-H. Halphen. —Œuvres publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. Tome II. — 1 vol. gr, in-8° de vni-560 p. ; 40 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1918.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

minima de SCHERK est immédiatement déterminée par application de cette formule.

Cette formule remarquable (ainsi qu'une formule analogue également retrouvée par M. CLAPIER, pour l'expression générale de la courbure totale d'une surface) a d'ailleurs été donnée depuis déjà longtemps par BORCHARDT :

C.-W. BORCHARDT : Sur la quadrature définie des surfaces courbes, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de LIOUVILLE), t. XIX, 1854, p. 369-394.

Deux théorèmes de M. BORCHARDT sur les fonctions symétriques d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, 1855, p. 26-27.

Cette formule permettrait de rattacher le problème des surfaces minima à un problème de la théorie des tourbillons

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

G.-H. HALPHEN. — **Œuvres** publiées par les soins de C. JORDAN, H. POINCARÉ, E. PICARD, avec la collaboration de E. VESSIOT. *Tome II*. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-560 p. ; 40 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1918.

Ce second volume s'ajoute, après un temps fort court, eu égard aux circonstances actuelles, à celui déjà analysé dans cette Revue (1916, p. 365). Il ne semble ni moins riche ni moins intéressant que le premier et contient tout d'abord les deux ultimes Mémoires *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques* ; cette question, rappelée et située dans la précédente analyse, considérée comme si décevante par Chasles et toujours emplie d'un malaise de non rigueur que de Jonquières ne fit qu'augmenter, reçut, comme on sait, une solution irréprochable de l'irréprochable algébriste qu'était Halphen. La publication du Tome II de ces *Œuvres*, complète et rassemble ainsi tous les efforts faits pour résoudre un problème, qui mérite une célébrité fort comparable à celle des plus fameuses énigmes éclaircies à la fin du dix-neuvième siècle.

En ne citant que les principaux écrits, nous en trouvons ensuite deux autres beaucoup plus courts mais presque aussi réputés que les précédents. Ils étudient le mouvement d'un point sur une conique et montrent que la loi de Newton est indépendante de considérations focales. Il importe de remarquer qu'il ne s'agit pas là de quelque fantaisie analytique, mais bien d'un problème de Mécanique céleste introduit par Tisserand dans son grand *Traité* et qui pourrait correspondre, par exemple, à la justification de la loi newtonnienne pour des systèmes stellaires doubles, dont l'observation serait insuffisante à déceler des propriétés focales.

Voici maintenant la profonde proposition d'algèbre sur la possibilité de mettre un polynôme à deux variables sous la forme  $A\varphi + B\psi$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont donnés. C'est l'un des pivots de la moderne théorie des surfaces algébriques, comme on peut s'en convaincre en ouvrant le tome II des *Fonctions de deux variables* de M. Emile Picard.

Quel mathématicien actuel, choisi parmi les plus savants, pourrait dire, à brûle pourpoint, ce qu'est la « suite de Farey » ? C'est l'ensemble des fractions réduites dont le dénominateur ne dépasse pas un entier donné. Elle a d'élégantes propriétés qu'Halphen généralise et elle aura, de plus, pour beaucoup, l'attrait de la nouveauté.

Abordons les si importantes recherches d'Halphen sur les points singu-

liers des courbes gauches et les lignes singulières des surfaces algébriques. La notion de *cycle*, déjà bien connue pour les courbes planes et dont l'importance n'a fait qu'augmenter par la suite, est étendue avec une grande habileté. Il faut encore remarquer l'emploi du théorème égalant le nombre des zéros et des infinis d'une fonction rationnelle des coordonnées d'une courbe algébrique ; il intervient avec une facilité inattendue dans les relations liant les ordres, les classes, les rangs relatifs à une courbe gauche. Les *covariants différentiels* des courbes gauches naissent en cherchant les points de cette courbe où une certaine équation différentielle est satisfaite ; j'ai déjà signalé le problème correspondant pour les courbes planes en analysant le volume précédent.

Sur les surfaces, les cycles proviennent, en général, de *nappes* et non de *branches* ; les cycles de nappes ont des propriétés dualistiques très simples notamment quant aux contacts. Les lignes asymptotiques jouent ici le rôle de lignes singulières à rôle simplificateur et toutes les belles propriétés ainsi obtenues sont finalement vérifiées sur les surfaces de révolution et les surfaces réglées.

Aux covariants différentiels s'ajoutent les *invariants* différentiels ; c'est d'ailleurs une idée, chère à Halphen, qui reparait sous des formes multiples. Cette idée a d'ailleurs été quelque peu transformée par la théorie des groupes, mais je crois bien que c'est encore à Halphen qu'il faudra remonter si l'on veut retrouver toute l'élégance géométrique du sujet primitif. L'invariant qui fut d'abord nouveau pour l'auteur provient d'une cubique ayant avec une courbe plane, en  $M$ , huit points communs confondus d'où un neuvième point  $N$  fixe sur la cubique et qui correspond de manière univoque à  $M$ . Les correspondances dues à de telles surosculations s'étendent même aux courbes gauches et donnent des théorèmes d'intégrabilité pour les équations différentielles.

Les fonctions elliptiques apparaissent, en nombre de pages, pour nous donner sans doute quelque idée de ce que la mort n'a pas permis à Halphen de mettre en son grand *Traité*.

La relation bien connue, dite « équation à trois termes » pour la fonction  $\sigma$ , s'écrit aussi bien pour la fonction  $H$ . Elle peut se vérifier aussi pour des polynômes, ce qui entraîne l'intégration algébrique de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y-1)}$$

Certaines extensions aux équations aux dérivées partielles sont possibles.

Pour en revenir aux invariants différentiels des courbes gauches il faut évidemment citer, en tout premier lieu, le travail d'une centaine de pages publié, en 1880, au *Journal de l'Ecole polytechnique*. On y trouve les résultats les plus divers appuyés sur des considérations d'apparence élémentaire telles la recherche des lignes invariantes par transformation homographique ; il y a aussi des transformations qui changent un invariant de courbe plane en un invariant de courbe gauche ; par surcroît, on intègre chemin faisant de nombreuses équations différentielles...

Le dernier tiers du volume renferme de nombreux petits Mémoires qui rappellent beaucoup ceux d'Hermite. Il y a là des polynômes à propriétés curieuses, des équations différentielles élégamment intégrables, des intégrales définies et, tout particulièrement, des études concernant, pour des

séries abéliennes, des questions de validité qui ne furent point traitées par Abel.

Je n'ai cité que les points les plus saillants. Beaucoup de théorèmes d'arithmétique s'imbriquent sur tout l'ensemble. A tous les points de vue, ce second tome peut être un magnifique et puissant instrument de travail.

Des faits récents viennent à l'appui de cette manière de voir ; les surfaces et surtout les courbes gauches algébriques attirent à nouveau l'attention des géomètres. Ces sujets sont actuellement repris, développés, prolongés ainsi que peut en faire foi la *Théorie des courbes gauches algébriques* professée en Sorbonne et récemment publiée par M. R. de Montessus (Paris, Croville-Morant, 1918). Nous aurons l'occasion de revenir prochainement sur cette nouvelle publication qui, en effet, et comme l'indique l'auteur lui-même, s'appuie tout particulièrement sur l'œuvre d'Halphen.

A. BUHL (Toulouse).

A. LÆWY. — **Lehrbuch der Algebra**. Erster Teil : *Grundlagen der Arithmetik*. — 1 vol. in-8<sup>o</sup>, 398 p., 12 M. ; Veit & Cie, Leipzig.

Ce volume, qui a pour objet les principes de l'arithmétique théorique, forme le tome I d'un *Traité d'Algèbre* destiné aux étudiants des Universités. Après s'être familiarisés dans l'enseignement secondaire avec la pratique des opérations arithmétiques et algébriques, il est indispensable que les étudiants en mathématiques fassent une étude approfondie des principes modernes de l'arithmétique théorique et de l'algèbre. Ils doivent avoir des connaissances précises sur les théories fondamentales concernant les notions des nombres rationnels, nombres irrationnels, les fractions continues, les puissances, les racines, les logarithmes, les limites, les séries, le développement du binôme, les produits infinis. Tous ces objets, limités au domaine réel, sont étudiés dans ce volume dans leur enchaînement logique avec la précision et la rigueur nécessaires. L'auteur a tenu compte des progrès récents réalisés grâce à l'introduction des notions de groupes et de corps. Son Ouvrage sera consulté avec fruit non seulement par les étudiants mais aussi par les professeurs.

H. F.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — **Introduction à la Théorie des Courbes gauches algébriques**. Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris, recueilli et rédigé par M. Vogt. — 1 vol. autographié, gr. in-4<sup>o</sup> de 112 p., avec figures, 12 fr. ; Croville-Morant, Paris, 1918.

C'est presque une stupéfaction que de parcourir ces pages si intéressantes. Quoi, il y a tant de choses dans les intersections de quadriques dont ne parlent point les traités qui s'étendent tant sur les quadriques elles-mêmes ! Vraiment la lacune était regrettable !

Le point de départ de l'auteur est général. Une courbe gauche algébrique est l'intersection de deux surfaces algébriques ; si, entre les équations de celle-ci, on élimine  $z$  puis toutes les puissances de  $z$  sauf  $z$ , la courbe a pour équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$$

et son étude est celle d'une fraction rationnelle sur la courbe  $\varphi = 0$ . C'est le point de vue utilisé par Cayley et Halphen. Il suffirait à imposer la géo-