Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1918)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

Autor: Daniëls, M.-Fr.

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18026

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2, il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2, en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i *et* A'_i *sont di-orthologiques en* A_1, *ils le sont encore en* A'_1.

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \ldots] \pm [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \ldots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, ... par les vecteurs également arbitraires $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $V\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, ... et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ..., prendre

$$\lambda_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{b} \qquad \lambda_2 = \mathfrak{b}' \, \mathfrak{c} \qquad \lambda_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{a}$$
$$\mu_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{c} \qquad \mu_2 = \mathfrak{b}' . \mathfrak{a} \qquad \mu_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{b} \, .$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mu_1 V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad V\mathfrak{b} . \mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c} , \mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}] \\ &- [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2[V\mathfrak{a}' , \mathfrak{a} , \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}', \mathfrak{b} , \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}' . \mathfrak{c} . \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 \, . \qquad \text{(XI)}\end{aligned}$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*[1] :

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i *des droites* $(A_i, A'_i) \equiv p_i$ *avec les côtés* a_i *du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction* q_i *des points* $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ *avec les sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes et inversement.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont:

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \ ; \quad V\mathfrak{ca} \ ; \quad V\mathfrak{ab} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}' \ ; \quad \mathfrak{b}' \ ; \quad \mathfrak{c}'$$
$$a_i \equiv \mathfrak{a} \ ; \quad \mathfrak{b} \ ; \quad \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ ; \quad V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \ ; \quad V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1, du point Q_1, du point P_1 et de la droite q_1

$$p_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad P_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*[1]

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques. *Lorsque les normales* q_i *abaissées des* A_i *sur les côtés* a'_i *du second triangle coupent les côtés* a_i *du premier triangle en trois points collinéaires* Q_i, *les normales* q'_i *abaissées des* A'_i *sur les* a_i *coupent les côtés* a'_i *du second triangle également en trois points collinéaires* Q'_i.

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$A_i \equiv V\mathfrak{bc} \ ; \quad V\mathfrak{ca} \ ; \quad V\mathfrak{ab} \qquad A'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ ; \quad V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \ ; \quad V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$
$$a_i \equiv \mathfrak{a} \ ; \quad \mathfrak{b} \ ; \quad \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv \mathfrak{a}' \ ; \quad \mathfrak{b}' \ ; \quad \mathfrak{c}'$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q'_1 et pour leurs intersections Q_1 et Q_2 avec les côtés a_1 et a'_1

$$q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad q'_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{bc} \qquad Q'_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \ .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

[1] *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ...

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{x}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{x}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{x}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{x}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathfrak{b} + \mu_1 \mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{x}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \\ &-[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0\end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*[1] :

Soient $\mathrm{A_i}$ *et* $\mathrm{A'_i}$ *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites $\mathrm{p_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A'_i}$ *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* $\mathrm{p'_i}$ *qui relient les points* $\mathrm{P'_i} \equiv (\mathrm{l}, \mathrm{a'_i})$ *aux sommets* $\mathrm{A_i}$ *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{x}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$\mathrm{P}_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad \mathrm{P}'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}'\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{x}\,,\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,.$$

[1] *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.