

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18028>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(5^e et dernier article)¹

L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendantes. Généralisation de l'arithmogéométrie.

101. — L'étude des arithmopoints des courbes ou des surfaces transcendantes est assez naturelle après les considérations qui précèdent, mais les principes qui permettent de rechercher certaines solutions des équations ordinaires de l'analyse indéterminée, tels que ceux qui sont à la base des travaux de FERMAT ou d'EULER, par exemple, ne sont plus d'aucune utilité dans le domaine des équations transcendantes. Ici, plus de fil directeur, plus de généralités possibles sur les relations entre les solutions. Seules quelques équations très spéciales de l'analyse transcendante ont pu jusqu'ici être soumises à des recherches arithmotrigonométriques.

De ces très rares équations indéterminées transcendantes douées de solutions rationnelles, que nous connaissons présentement, les deux plus anciennes semblent encore avoir

¹ Voir *L'Enseignement mathématique*, 18^e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19^e année, 15 mai 1917, pp. 159-191 et juillet-septembre-novembre 1917, pp. 233-272.

Voir aussi *Le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme*, dans *L'Enseignement Mathématique*, 17^e année, septembre-novembre 1915, pp. 315-324; et une Note *Au sujet d'un article de M. A. Gérardin*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4^e], t. XVIII, février 1918, pp. 43-49.

Une erreur s'est glissée dans mon précédent article, à l'occasion de la démonstration de l'impossibilité de l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; le résultat est exact. J'aurai très prochainement l'occasion de revenir sur cette question.

été primitivement envisagées par L. EULER; mais il ne s'agit nullement ici de spéculations du genre de celles qui font l'objet des mémoires dont la réunion a constitué les admirables *Commentationes arithmeticae*; il ne s'agit plus, dis-je, de questions arithmétiques et c'est dans de tout autres circonstances que ces deux équations ont été mentionnées par EULER.

L'une des deux équations auxquelles je fais allusion est la suivante :

$$\text{arc tang } x + \text{arc tang } y = \frac{\pi}{4} ;$$

elle admet la solution $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, d'après la relation d'EULER :

$$\text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} .$$

L'autre, beaucoup plus importante, est l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

elle représente une courbe transcendante douée d'une infinité d'arithmopoints, au sujet desquels L. EULER s'étend assez longuement, dans un passage qui mérite d'être cité presque intégralement :

« Telle est la courbe comprise dans l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

« on voit bien sur-le-champ que l'appliquée y est constamment égale à l'abscisse x , de sorte que la ligne droite inclinée à l'axe sous un angle demi-droit satisfait à l'équation. Il est cependant visible que l'équation proposée a une signification plus étendue que celle de la ligne droite $y = x$, et que par conséquent celle-ci ne peut exprimer tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut satisfaire aussi à cette dernière sans que x soit égal à y . Par exemple, si $x = 2$, y peut être égal à 4; ... nous aurons :

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y = t^{\frac{t}{t-1}} \dots$$

« Il y a donc une infinité de nombres x et y qui, pris deux
 « à deux, peuvent satisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels sont
 « les nombres suivants, en s'en prenant à ceux qui sont
 « rationnels :

$$\begin{aligned} x &= 2, & y &= 4, \\ x &= \frac{9}{4}, & y &= \frac{27}{8}, \\ x &= \frac{64}{27}, & y &= \frac{256}{81}, \\ x &= \frac{625}{256}, & y &= \frac{3125}{1024} \text{ etc. } \dots \end{aligned}$$

« Quoi qu'il y ait, dans ces courbes et dans les autres
 « semblables, une infinité de points qui peuvent être dimi-
 « nués algébriquement, elles ne peuvent cependant être
 « mises au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles
 « renferment une infinité d'autres points qu'il est impossible
 « d'aligner d'une manière semblable¹. »

102. — La propriété de la courbe d'équation $x^y = y^x$ d'ad-
 mettre les arithmopoints semble avoir été l'origine de deux
 questions concernant la courbe transcendante représentée
 par l'équation²

$$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1,$$

douée des arithmopoints de coordonnées $(x = 1, y = 1)$,
 $(x = 2, y = 2)$ et de tous les arithmopoints de l'axe Oy
 $(x = 0, y \text{ quelconque})$, ainsi que la courbe³ d'équation

$$x^y = y^x + 1,$$

qui est douée elle aussi des arithmopoints de coordonnées
 $(x = 2, y = 2)$, $(x = 3, y = 2)$ et de tous les arithmopoints
 de l'axe Ox .

D'autre part, la relation d'EULER :

$$\text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

¹ *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, par Léonard EULER, trad. J.-B. LABEY, t. II, im-
 primé en 1797, p. 297-298.

² *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [2], t. XV, 1876, p. 144 et p. 545-547.

³ *Ibid.*, [2], t. XIV, 1875, p. 288, et [2], t. XV, 1876, p. 44-46.

et celles analogues de VÉGA et de MACHIN :

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}, \quad (\text{Véga})$$

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}, \quad (\text{Machin})$$

ont donné lieu à divers travaux.

Une question posée, au sujet de ces relations d'EULER, de VÉGA et de MACHIN dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*¹, a provoqué la publication de toute une série de Mémoires importants de M. Carl STÖRMER², concernant des équations de cette nature.

M. C. STÖRMER a notamment démontré que, en outre des solutions d'EULER, de VÉGA et de MACHIN, l'équation

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4},$$

n'admet en nombres entiers qu'une seule solution nouvelle :

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

M. E.-B. ESCOTT³ a d'autre part rappelé l'existence des recherches de GAUSS dans cet ordre d'idées et il a en outre

¹ Question n° 377 (S. Gravé), t. 1, 1894, p. 228.

² Carl STÖRMER, *Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, et k de l'équation*

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Christiania Videnskabselskabs skrifter, 1895.)

Sur les solutions entières $x_1 \dots x_n \dots z_1 \dots z_n$, k, de l'équation :

$$x_1 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_1} + x_2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_2} + \dots + x_n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_n} = k \frac{\pi}{4}.$$

(C. R., t. CXXII, 27 janvier 1896, p. 175-177.)

(" " " et 3 février 1896, p. 225-227.)

Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc} \operatorname{tang} x_1 + \dots + c_n \operatorname{arc} \operatorname{tang} x_n = k \frac{\pi}{4}.$$

(Archiv for Matematik og Naturvidenskab, Christiania, 1896.)

Solution complète en nombres entiers de l'équation :

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1899, p. 160-170.)

³ *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896. t. 3, p. 276.

indiqué une formule intéressante :

$$\frac{\pi}{4} = 22 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{28} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{445} - 5 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{1393} - 10 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{11018} .$$

Il convient enfin de signaler ici l'existence d'arithmopoints sur la courbe logistique : cette proposition négative, concernant l'impossibilité en nombres rationnels de l'équation

$$e^x = y ,$$

a été établie en 1882 par F. LINDEMANN¹. Elle a donné lieu tout récemment à un très intéressant travail de MM. G. N. BAUER et H. L. SLOBIN « *Some transcendental Curves and Numbers* »².

Il est vraisemblable que la liste précédente des travaux où se trouvent des résultats susceptibles d'être rattachés à l'arithmogéométrie des courbes et des surfaces transcendentes est loin d'être complète ; en tous cas, leur nombre est certainement encore restreint.

103. — GÉNÉRALISATION DE L'ARITHMOGÉOMÉTRIE. — La même remarque s'applique aussi aux recherches faites autour d'une généralisation importante et naturelle de l'arithmogéométrie dont la première manifestation se trouve dans des travaux de Ang. GENOCCHI.

G. LAMÉ³ avait, en 1840, publié un remarquable mémoire sur un cas particulier du dernier théorème de Fermat ; il avait établi l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée :

$$x^7 + y^7 = z^7 ;$$

A. CAUCHY⁴, M. LEBESGUE⁵ et le P. PÉPIN⁶ avaient à cette

¹ *Ueber die Zahl π* , Mathematische Annalen, XX, 1882, S. 213-225.

² Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XXXVI, 1913, p. 327-337.

³ G. LAMÉ. *Mémoire d'Analyse indéterminée démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, pp. 195-211.

⁴ A. CAUCHY. Rapport sur le Mémoire précédent (ibid.), p. 211-215 ; cf. aussi C. R., t. IX, 16 septembre 1839, p. 359-363.

⁵ M. LEBESGUE. *Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers* (Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, p. 276-279.

⁶ Le P. PÉPIN. *Impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$* , C. R., t. LXXXII, 1876, p. 676-679 et 743-747. Cette impossibilité est ici rattachée à celle d'une équation $x^4 + 7^3 y^4 = \square$ appartenant à une famille plus étendue d'équations étudiées par Edouard LUCAS.

occasion présenté quelques remarques et simplifié la démonstration de G. LAMÉ.

Poussant plus loin l'analyse de cette équation particulière de Fermat, A. GENOCCHI établit que, non seulement, *elle est impossible en nombres entiers, mais aussi en prenant pour x, y, z les racines d'une même équation du troisième degré à coefficients rationnels*; cette impossibilité est rattachée à celle de l'équation

$$x^4 + 6x^2 - \frac{1}{7} = \square,$$

en nombres rationnels ¹.

104. — La propriété négative de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, de ne point posséder non seulement des arithmopoints, mais encore des points dont les coordonnées homogènes x, y et z soient exprimables par les racines d'une même équation cubique rationnelle, doit être considérée comme le premier théorème d'une généralisation de l'arithmogéométrie : cette nouvelle branche de l'étude géométrique d'une équation indéterminée de l'analyse diophantine aurait pour objet la recherche de ceux des points particuliers d'une courbe donnée, représentée au moyen d'une équation rationnelle, par chacun desquels puisse passer une courbe de même nature, mais d'un degré moindre imposé a priori : les points situés sur une arithmodroite seraient précisément les arithmopoints de la courbe donnée; les points situés sur une conique constitueraient une seconde famille; la troisième famille serait celle des points situés sur une cubique d'équation rationnelle.

En d'autres termes, cette généralisation de l'arithmogéométrie consisterait à substituer à l'ensemble des nombres rationnels celui des nombres quadratiques, puis celui des nombres cubiques ou plus généralement celui des nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité. Le programme d'une telle étude a été tracé dans un mémoire

¹ A. GENOCCHI. *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles*, C. R., t. LXXVIII, 9 février 1874, p. 433-435. — *Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$* , C. R., t. LXXXII, 1876, p. 910-913.

de H. POINCARÉ : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*¹.

Généralisation par voie complexe.

105. — Dans les derniers paragraphes ci-dessus, j'ai rappelé quelques rares essais d'extension de l'arithmogéométrie, qui se rattachent tous à l'étude bien difficile des arithmo-points de courbes ou de surfaces transcendantes spéciales, ou encore à celle de ceux des points des courbes ou surfaces algébriques dont les coordonnées sont exprimables non plus rationnellement mais au moyen de nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité.

Ce sont là deux directions bien distinctes vers lesquelles l'arithmogéométrie semble devoir s'orienter. Le grand intérêt qui est actuellement attaché au célèbre théorème de FERMAT ne peut que provoquer des recherches arithmogéométriques autour des courbes spéciales d'ordre élevé, ou même d'ordre indéterminé, plus ou moins analogues aux laméennes. Les belles recherches de M. C. STÖRMER sont d'autre part de nature à faire naître le désir d'entreprendre des études semblables pour d'autres types d'équations transcendantes.

Ce sont là, je le répète, des questions qui seront certainement étudiées dans un avenir plus ou moins éloigné de nous.

A côté de ces deux extensions naturelles de l'arithmogéométrie, je crois devoir signaler enfin une troisième généralisation essentiellement différente des précédentes, car elle consiste en une prolongation de l'arithmogéométrie dans le domaine des grandeurs et des nombres imaginaires. De même, en effet, que la considération de ceux des éléments de certaines figures géométriques, qui sont repérés par des nombres rationnels, a pu présenter un certain intérêt, de même l'étude des éléments réels des figures complexes peut parfois conduire à des résultats qui, s'ils ne semblent

¹ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 5^e série, t. 7, 1901, p. 161-233.

offrir aucune utilité immédiate, sont néanmoins suffisamment curieux pour mériter de ce fait d'être mentionnés ici.

Le sujet de cette étude des éléments réels de figures imaginaires est évidemment immense, en raison même du nombre illimité des figures imaginaires de la géométrie plane et de la géométrie spatiale. Il y a donc lieu de limiter les développements qui vont suivre à ceux des résultats qui paraissent tout spécialement les plus curieux.

106. — Dans tout ce qui va suivre, les figures complexes considérées seront définies par des points dont les coordonnées seront des nombres imaginaires de la forme $x + iy$. Un point imaginaire du plan dépend ainsi de quatre nombres réels; un point de l'espace dépend de six nombres réels.

Le principe, qui est à la base des remarques suivantes, est que, sur toute droite imaginaire du plan représentée par une équation

$$(a + ia')X + (b + ib')Y + (c + ic') = 0 ,$$

il existe un point réel. Corrélativement, parmi toutes les droites pivotant autour d'un même point imaginaire, il existe une droite réelle, en géométrie plane bien entendu.

Lorsque la droite imaginaire varie dans le plan [en entendant par variation de la droite imaginaire celle des quatre paramètres réels qui figurent dans son équation après division par $c + ic'$, par exemple], le point réel se déplace dans ces conditions et son déplacement est parfaitement déterminé par la loi de variation des coefficients de la droite imaginaire. Toutefois le déplacement du point réel ne précise nullement celui de la droite, puisque la représentation analytique d'une droite de cette nature s'effectue au moyen de quatre paramètres réels.

107. — DÉFINITION DES COURBES ORTHOPTIQUES. — La loi la plus simple de variation d'une droite imaginaire, dans le plan, consiste à faire dépendre les quatre coefficients réels de l'équation de cette droite d'un paramètre réel unique.

Les deux droites réelles, représentées par les équations respectives

$$aX + bY + c = 0 \quad \text{et} \quad a'X + b'Y + c' = 0 ,$$

qui déterminent par leur intersection le point réel de la droite imaginaire, enveloppent alors deux courbes réelles du plan; le point réel considéré décrit un certain lieu géométrique, réel lui aussi.

Plus particulièrement, supposons que l'équation de la droite imaginaire soit l'équation canonique

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi = 0 ;$$

φ est ici un azimut complexe :

$$\varphi = t + iT ;$$

de même la distance ϖ de l'origine des coordonnées à cette droite imaginaire est un nombre imaginaire :

$$\varpi = p + iP ;$$

t est supposé variable et pris pour paramètre destiné à repérer la droite imaginaire; T , p , P sont, en d'autres termes, quatre fonctions données de la variable réelle t .

Si maintenant ce paramètre t prend un accroissement réel, tout se passe comme pour le cas d'une ∞^1 de droites réelles; le point d'intersection de deux droites voisines de paramètres t et $t + dt$ a une limite lorsque dt tend vers zéro et par suite les droites imaginaires considérées enveloppent une courbe imaginaire représentée par les fonctions précédentes T , p et P .

Cela étant, la tangente imaginaire considérée est douée d'un point réel, défini comme intersection des deux droites réelles représentées respectivement par les équations :

$$\begin{aligned} x \cos t + y \sin t &= \frac{p}{\operatorname{ch} T} , \\ -x \sin t + y \cos t &= \frac{P}{\operatorname{sh} T} ; \end{aligned}$$

celles-ci sont évidemment deux droites rectangulaires, qui enveloppent deux courbes réelles c_1 et c_2 simplement définies par les équations polaires tangentielles qui précèdent. Ainsi donc :

La courbe réelle, lieu des points réels situés sur les tangentes d'une courbe imaginaire, peut toujours être simplement définie comme l'orthoptique de deux courbes réelles.

Cette proposition rattache donc la notion de courbe orthoptique d'une courbe réelle à celle de la courbe réelle d'une certaine figure imaginaire.

108. — DROITES IMAGINAIRES DE L'ESPACE AYANT UN POINT RÉEL. — Alors que, sur toute droite imaginaire du plan, il existe toujours un point réel, il n'en est pas de même en géométrie spatiale.

Soit une droite imaginaire générale de l'espace. Elle part du point imaginaire μ de coordonnées

$$\xi = x_1 + ix_2, \quad \eta = y_1 + iy_2, \quad \zeta = z_1 + iz_2;$$

sa direction est définie par des coefficients

$$\alpha = a_1 + ia_2, \quad \beta = b_1 + ib_2, \quad \gamma = c_1 + ic_2;$$

les coordonnées d'un point quelconque de la droite sont :

$$\Xi = \xi + \lambda\alpha, \quad \text{H} = \eta + \lambda\beta, \quad \text{Z} = \zeta + \lambda\gamma,$$

le paramètre λ étant l'imaginaire $l_1 + il_2$. Pour que ce point courant de la droite puisse être réel, il faut et il suffit que les parties purement imaginaires des expressions des trois coordonnées Ξ , H , Z soient simultanément nulles :

$$x_2 + l_1 a_2 + l_2 a_1 = 0,$$

$$y_2 + l_1 b_2 + l_2 b_1 = 0,$$

$$z_2 + l_1 c_2 + l_2 c_1 = 0;$$

il en résulte la condition suivante d'existence d'un point réel sur la droite imaginaire considérée :

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

l_1 et l_2 s'obtiennent alors par le système linéaire ci-dessus

écrit et les coordonnées du point réel M sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} X &= x_1 + a_1 l_1 - a_2 l_2 , \\ Y &= y_1 + b_1 l_1 - b_2 l_2 , \\ Z &= z_1 + c_1 l_1 - c_2 l_2 . \end{aligned}$$

109. — DÉFINITION DE LA DÉVELOPPANTE D'UNE COURBE PLANE RÉELLE. — Parmi les courbes imaginaires de l'espace ordinaire, les plus remarquables sont certainement les lignes de longueur nulle. Leurs équations au moyen d'un paramètre réel t et d'une fonction $F(t)$ de cette variable réelle sont :

$$\begin{aligned} \xi &= \int (1 - t^2) F''' dt = (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , \\ \eta &= i \int (1 + t^2) F''' dt = i \{ (1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F \} , \\ \zeta &= 2 \int t F''' dt = 2tF'' - 2F' ; \end{aligned}$$

F' , F'' et F''' désignent les dérivées première, seconde et troisième de cette fonction générale $F(t)$. Dans le cas actuel on a donc

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , & x_2 &= 0 , \\ y_1 &= 0 , & y_2 &= (1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F , \\ z_1 &= 2tF'' - 2F' , & z_2 &= 0 ; \end{aligned}$$

les coefficients de direction de la tangente imaginaire à cette courbe imaginaire sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 - t^2) F''' , & a_2 &= 0 . \\ b_1 &= 0 , & b_2 &= (1 + t^2) F''' , \\ c_1 &= 2tF''' , & c_2 &= 0 . \end{aligned}$$

La condition d'existence d'un point réel sur cette droite imaginaire est manifestement satisfaite quelle que soit la fonction $F(t)$; les valeurs de l_1 et de l_2 sont ici

$$l_1 = - \frac{y_2}{b_2} , \quad l_2 = 0 ,$$

et les coordonnées du point réel sont par suite :

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot \frac{tF' - F}{1 + t^2} , \\ y &= 0 , \\ z &= - 2 \cdot \frac{(1 - t^2) F' + 2tF}{1 + t^2} . \end{aligned}$$

Ce point décrit une courbe réelle située dans le même plan que la courbe (c_1) décrite par le point réel de coordonnées x_1, y_1, z_1 . Comme les diverses coordonnées introduites sont liées par la relation $dx_1^2 + dz_1^2 = dy_2^2$, y_2 n'est autre que l'abscisse curviligne s_1 de cette courbe réelle (c_1) et puisque l_1 est égal à $-\frac{y_2}{b_2} = -\frac{y_2}{y_2'}$, les coordonnées du point réel M deviennent :

$$x = \frac{1}{y_2'}(x_1 y_2' - y_2 x_1') = x_1 - s_1 \frac{dx_1}{ds_1},$$

$$y = 0,$$

$$z = \frac{1}{y_1'}(z_1 y_2' - y_2 z_1') = z_1 - s_1 \frac{dz_1}{ds_1};$$

ces dernières équations prouvent que ce point (x, y, z) décrit une développante par le fil de la courbe réelle (c_1) .

En résumé : *toutes les tangentes d'une courbe minima de l'espace sont douées d'un point réel. La courbe lieu de ces points réels n'est autre qu'une développante de la courbe réelle plane (c_1) .*

Comme la courbe plane (c_1) , dont la ligne de longueur nulle peut être déduite au titre d'hélice particulière du cylindre de section droite (c_1) , est absolument générale, cette proposition définit d'une manière inattendue la développante d'une courbe plane.

110. — Plus généralement, supposons que la droite imaginaire de l'espace appartienne à une ∞^1 développable : les douze paramètres $(x_1, \dots, z_2), (a_1, \dots, c_2)$ sont des fonctions réelles de la seule variable réelle t liées par les relations :

$$a_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad b_1 = \frac{dy_1}{dt}, \quad c_1 = \frac{dz_1}{dt},$$

$$a_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad b_2 = \frac{dy_2}{dt}, \quad c_2 = \frac{dz_2}{dt};$$

la condition d'existence d'un point réel sur une telle tan-

gente imaginaire à une courbe imaginaire est alors :

$$\begin{vmatrix} x_2 & \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_1}{dt} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 .$$

On se donnera, pour y satisfaire, la courbe gauche réelle (c_2) lieu du point M_2 de coordonnées x_2, y_2, z_2 . P et Q étant deux fonctions de la variable réelle t , on posera :

$$dx_1 = Pd(Qx_2) ,$$

$$dy_1 = Pd(Qy_2) ,$$

$$dz_1 = Pd(Qz_2) ;$$

la courbe (c_1) lieu du point (x_1, y_1, z_1) est alors définie, à une translation arbitraire près, par trois quadratures :

$$x_1 = PQx_2 - \int Qx_2 dP ,$$

$$y_1 = PQy_2 - \int Qy_2 dP ,$$

$$z_1 = PQz_2 - \int Qz_2 dP ;$$

si, par exception, la courbe (c_2) est un axe de coordonnées, l'axe Oz par exemple, la condition est satisfaite quelle que soit la courbe (c_1) , puisque x_2, y_2, x'_2 et y'_2 sont nuls; l_2 est nul et l_1 prend la valeur $-\frac{z_2}{z'_2}$, de sorte que les coordonnées du point réel M sont alors :

$$x = x_1 - z_2 \frac{dx_1}{dz_2} , \quad y = y_1 - z_2 \frac{dy_1}{dz_2} , \quad z = z_1 - z_2 \frac{dz_1}{dz_2} ;$$

la courbe (c_1) reste indéterminée; le point M est un point de la tangente en M_1 à cette courbe réelle (c_1) , à une distance $M_1M = z_2 \frac{dz_1}{dz_2}$ du point M_1 de contact de la tangente. En pre-

nant plus particulièrement z_2 proportionnel à l'abscisse curviligne s_1 de la courbe (c_1) , $z_2 = ks_1$, la courbe lieu de M est une développante par le fil de la courbe (c_1) . Ce résultat constitue par suite une généralisation de celui qui a été indiqué au paragraphe précédent, à propos des courbes de longueur nulle (k est alors égal à l'unité et z_1 est nul, aux notations près).

*
* * *

111. — Je n'insiste pas sur cette question qui ne présente qu'un intérêt de curiosité. Il me suffira de dire que les remarques qui précèdent ne sont pas les seules qu'il est possible de faire dans la considération des éléments de certaines figures imaginaires du plan ou de l'espace. C'est ainsi que des transformations rationnelles bien connues peuvent être rattachées à ces mêmes considérations et que l'étude des droites de l'espace qui sont douées d'un point réel met en évidence certains systèmes rectilignes, congruences ou complexes, bien connus par ailleurs.

Paris, le 1^{er} février 1918.
