

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendentes.
Généralisation de l'arithmogéométrie.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18028>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(5^e et dernier article)¹

L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendantes. Généralisation de l'arithmogéométrie.

101. — L'étude des arithmopoints des courbes ou des surfaces transcendantes est assez naturelle après les considérations qui précèdent, mais les principes qui permettent de rechercher certaines solutions des équations ordinaires de l'analyse indéterminée, tels que ceux qui sont à la base des travaux de FERMAT ou d'EULER, par exemple, ne sont plus d'aucune utilité dans le domaine des équations transcendantes. Ici, plus de fil directeur, plus de généralités possibles sur les relations entre les solutions. Seules quelques équations très spéciales de l'analyse transcendante ont pu jusqu'ici être soumises à des recherches arithmotrigonométriques.

De ces très rares équations indéterminées transcendantes douées de solutions rationnelles, que nous connaissons présentement, les deux plus anciennes semblent encore avoir

¹ Voir *L'Enseignement mathématique*, 18^e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19^e année, 15 mai 1917, pp. 159-191 et juillet-septembre-novembre 1917, pp. 233-272.

Voir aussi *Le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme*, dans *L'Enseignement Mathématique*, 17^e année, septembre-novembre 1915, pp. 315-324; et une Note *Au sujet d'un article de M. A. Gérardin*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4^e], t. XVIII, février 1918, pp. 43-49.

Une erreur s'est glissée dans mon précédent article, à l'occasion de la démonstration de l'impossibilité de l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; le résultat est exact. J'aurai très prochainement l'occasion de revenir sur cette question.

été primitivement envisagées par L. EULER; mais il ne s'agit nullement ici de spéculations du genre de celles qui font l'objet des mémoires dont la réunion a constitué les admirables *Commentationes arithmeticae*; il ne s'agit plus, dis-je, de questions arithmétiques et c'est dans de tout autres circonstances que ces deux équations ont été mentionnées par EULER.

L'une des deux équations auxquelles je fais allusion est la suivante :

$$\text{arc tang } x + \text{arc tang } y = \frac{\pi}{4} ;$$

elle admet la solution $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, d'après la relation d'EULER :

$$\text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} .$$

L'autre, beaucoup plus importante, est l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

elle représente une courbe transcendante douée d'une infinité d'arithmopoints, au sujet desquels L. EULER s'étend assez longuement, dans un passage qui mérite d'être cité presque intégralement :

« Telle est la courbe comprise dans l'équation :

$$x^y = y^x ;$$

« on voit bien sur-le-champ que l'appliquée y est constamment égale à l'abscisse x , de sorte que la ligne droite inclinée à l'axe sous un angle demi-droit satisfait à l'équation. Il est cependant visible que l'équation proposée a une signification plus étendue que celle de la ligne droite $y = x$, et que par conséquent celle-ci ne peut exprimer tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut satisfaire aussi à cette dernière sans que x soit égal à y . Par exemple, si $x = 2$, y peut être égal à 4; ... nous aurons :

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y = t^{\frac{t}{t-1}} \dots$$

« Il y a donc une infinité de nombres x et y qui, pris deux
 « à deux, peuvent satisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels sont
 « les nombres suivants, en s'en prenant à ceux qui sont
 « rationnels :

$$\begin{aligned} x &= 2, & y &= 4, \\ x &= \frac{9}{4}, & y &= \frac{27}{8}, \\ x &= \frac{64}{27}, & y &= \frac{256}{81}, \\ x &= \frac{625}{256}, & y &= \frac{3125}{1024} \text{ etc. } \dots \end{aligned}$$

« Quoi qu'il y ait, dans ces courbes et dans les autres
 « semblables, une infinité de points qui peuvent être dimi-
 « nués algébriquement, elles ne peuvent cependant être
 « mises au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles
 « renferment une infinité d'autres points qu'il est impossible
 « d'aligner d'une manière semblable¹. »

102. — La propriété de la courbe d'équation $x^y = y^x$ d'ad-
 mettre les arithmopoints semble avoir été l'origine de deux
 questions concernant la courbe transcendante représentée
 par l'équation²

$$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1,$$

douée des arithmopoints de coordonnées $(x = 1, y = 1)$,
 $(x = 2, y = 2)$ et de tous les arithmopoints de l'axe Oy
 $(x = 0, y \text{ quelconque})$, ainsi que la courbe³ d'équation

$$x^y = y^x + 1,$$

qui est douée elle aussi des arithmopoints de coordonnées
 $(x = 2, y = 2)$, $(x = 3, y = 2)$ et de tous les arithmopoints
 de l'axe Ox .

D'autre part, la relation d'EULER :

$$\text{arc tang } \frac{1}{2} + \text{arc tang } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

¹ Introduction à l'Analyse infinitésimale, par Léonard EULER, trad. J.-B. LABEY, t. II, imprimé en 1797, p. 297-298.

² Nouvelles Annales de Mathématiques, [2], t. XV, 1876, p. 144 et p. 545-547.

³ Ibid., [2], t. XIV, 1875, p. 288, et [2], t. XV, 1876, p. 44-46.

et celles analogues de VÉGA et de MACHIN :

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}, \quad (\text{Véga})$$

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}, \quad (\text{Machin})$$

ont donné lieu à divers travaux.

Une question posée, au sujet de ces relations d'EULER, de VÉGA et de MACHIN dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*¹, a provoqué la publication de toute une série de Mémoires importants de M. Carl STÖRMER², concernant des équations de cette nature.

M. C. STÖRMER a notamment démontré que, en outre des solutions d'EULER, de VÉGA et de MACHIN, l'équation

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4},$$

n'admet en nombres entiers qu'une seule solution nouvelle :

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

M. E.-B. ESCOTT³ a d'autre part rappelé l'existence des recherches de GAUSS dans cet ordre d'idées et il a en outre

¹ Question n° 377 (S. Gravé), t. 1, 1894, p. 228.

² Carl STÖRMER, *Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, et k de l'équation*

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Christiania Videnskabselskabs skrifter, 1895.)

Sur les solutions entières $x_1 \dots x_n \dots z_1 \dots z_n$, k, de l'équation :

$$x_1 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_1} + x_2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_2} + \dots + x_n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{z_n} = k \frac{\pi}{4}.$$

(C. R., t. CXXII, 27 janvier 1896, p. 175-177.)

(" " " et 3 février 1896, p. 225-227.)

Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc} \operatorname{tang} x_1 + \dots + c_n \operatorname{arc} \operatorname{tang} x_n = k \frac{\pi}{4}.$$

(Archiv for Matematik og Naturvidenskab, Christiania, 1896.)

Solution complète en nombres entiers de l'équation :

$$m \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

(Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1899, p. 160-170.)

³ *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896. t. 3, p. 276.

indiqué une formule intéressante :

$$\frac{\pi}{4} = 22 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{28} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{445} - 5 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{1393} - 10 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{11018} .$$

Il convient enfin de signaler ici l'existence d'arithmopoints sur la courbe logistique : cette proposition négative, concernant l'impossibilité en nombres rationnels de l'équation

$$e^x = y ,$$

a été établie en 1882 par F. LINDEMANN¹. Elle a donné lieu tout récemment à un très intéressant travail de MM. G. N. BAUER et H. L. SLOBIN « *Some transcendental Curves and Numbers* »².

Il est vraisemblable que la liste précédente des travaux où se trouvent des résultats susceptibles d'être rattachés à l'arithmogéométrie des courbes et des surfaces transcendentes est loin d'être complète ; en tous cas, leur nombre est certainement encore restreint.

103. — GÉNÉRALISATION DE L'ARITHMOGÉOMÉTRIE. — La même remarque s'applique aussi aux recherches faites autour d'une généralisation importante et naturelle de l'arithmogéométrie dont la première manifestation se trouve dans des travaux de Ang. GENOCCHI.

G. LAMÉ³ avait, en 1840, publié un remarquable mémoire sur un cas particulier du dernier théorème de Fermat ; il avait établi l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée :

$$x^7 + y^7 = z^7 ;$$

A. CAUCHY⁴, M. LEBESGUE⁵ et le P. PÉPIN⁶ avaient à cette

¹ *Ueber die Zahl π* , Mathematische Annalen, XX, 1882, S. 213-225.

² Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XXXVI, 1913, p. 327-337.

³ G. LAMÉ. *Mémoire d'Analyse indéterminée démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, pp. 195-211.

⁴ A. CAUCHY. Rapport sur le Mémoire précédent (ibid.), p. 211-215 ; cf. aussi C. R., t. IX, 16 septembre 1839, p. 359-363.

⁵ M. LEBESGUE. *Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers* (Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, p. 276-279.

⁶ Le P. PÉPIN. *Impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$* , C. R., t. LXXXII, 1876, p. 676-679 et 743-747. Cette impossibilité est ici rattachée à celle d'une équation $x^4 + 7^3 y^4 = \square$ appartenant à une famille plus étendue d'équations étudiées par Edouard LUCAS.

occasion présenté quelques remarques et simplifié la démonstration de G. LAMÉ.

Poussant plus loin l'analyse de cette équation particulière de Fermat, A. GENOCCHI établit que, non seulement, *elle est impossible en nombres entiers, mais aussi en prenant pour x, y, z les racines d'une même équation du troisième degré à coefficients rationnels*; cette impossibilité est rattachée à celle de l'équation

$$x^4 + 6x^2 - \frac{1}{7} = \square,$$

en nombres rationnels ¹.

104. — La propriété négative de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, de ne point posséder non seulement des arithmopoints, mais encore des points dont les coordonnées homogènes x, y et z soient exprimables par les racines d'une même équation cubique rationnelle, doit être considérée comme le premier théorème d'une généralisation de l'arithmogéométrie : cette nouvelle branche de l'étude géométrique d'une équation indéterminée de l'analyse diophantine aurait pour objet la recherche de ceux des points particuliers d'une courbe donnée, représentée au moyen d'une équation rationnelle, par chacun desquels puisse passer une courbe de même nature, mais d'un degré moindre imposé a priori : les points situés sur une arithmodroite seraient précisément les arithmopoints de la courbe donnée; les points situés sur une conique constitueraient une seconde famille; la troisième famille serait celle des points situés sur une cubique d'équation rationnelle.

En d'autres termes, cette généralisation de l'arithmogéométrie consisterait à substituer à l'ensemble des nombres rationnels celui des nombres quadratiques, puis celui des nombres cubiques ou plus généralement celui des nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité. Le programme d'une telle étude a été tracé dans un mémoire

¹ A. GENOCCHI. *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles*, C. R., t. LXXVIII, 9 février 1874, p. 433-435. — *Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$* , C. R., t. LXXXII, 1876, p. 910-913.

de H. POINCARÉ : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*¹.

Généralisation par voie complexe.

105. — Dans les derniers paragraphes ci-dessus, j'ai rappelé quelques rares essais d'extension de l'arithmogéométrie, qui se rattachent tous à l'étude bien difficile des arithmo-points de courbes ou de surfaces transcendantes spéciales, ou encore à celle de ceux des points des courbes ou surfaces algébriques dont les coordonnées sont exprimables non plus rationnellement mais au moyen de nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité.

Ce sont là deux directions bien distinctes vers lesquelles l'arithmogéométrie semble devoir s'orienter. Le grand intérêt qui est actuellement attaché au célèbre théorème de FERMAT ne peut que provoquer des recherches arithmogéométriques autour des courbes spéciales d'ordre élevé, ou même d'ordre indéterminé, plus ou moins analogues aux laméennes. Les belles recherches de M. C. STÖRMER sont d'autre part de nature à faire naître le désir d'entreprendre des études semblables pour d'autres types d'équations transcendantes.

Ce sont là, je le répète, des questions qui seront certainement étudiées dans un avenir plus ou moins éloigné de nous.

A côté de ces deux extensions naturelles de l'arithmogéométrie, je crois devoir signaler enfin une troisième généralisation essentiellement différente des précédentes, car elle consiste en une prolongation de l'arithmogéométrie dans le domaine des grandeurs et des nombres imaginaires. De même, en effet, que la considération de ceux des éléments de certaines figures géométriques, qui sont repérés par des nombres rationnels, a pu présenter un certain intérêt, de même l'étude des éléments réels des figures complexes peut parfois conduire à des résultats qui, s'ils ne semblent

¹ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 5^e série, t. 7, 1901, p. 161-233.