

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1920-1921)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES ANTINOMIES CANTORIENNES. — II.  
**Autor:** Mirimanoff, D.  
**Kapitel:** Chapitre premier.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515708>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CHAPITRE PREMIER.

Je commencerai par quelques remarques sur les notions fondamentales d'ensemble, de rang, d'isomorphisme.

I. *Notions d'ensemble, de rang, d'isomorphisme.* Dans les deux notes publiées ici même, je me suis placé au point de vue classique, qui est celui de CANTOR. Pour Cantor, comme pour ZERMELO, deux ensembles qui ont mêmes éléments, doivent être regardés comme identiques; il n'y a qu'une seule opération de réunion ou d'association, que Zermelo représente par une accolade, et moi par une parenthèse. Pour J. König, au contraire, il est utile, parfois nécessaire même, de distinguer plusieurs sortes d'opérations de réunion. D'autres distinctions d'une nature différente peuvent nous être imposées dans l'étude de certains problèmes. On arrive ainsi à une notion plus large, qui ne doit pas être confondue avec celle de Cantor. Nous aurons encore l'occasion de revenir sur ce point.

J'ai expliqué dans mes notes sur les antinomies ce qu'il fallait entendre par type de structure et rang d'un ensemble (ordinaire). Je crois qu'il serait inutile de rappeler ces définitions; je tiens seulement à faire remarquer que la notion de rang, dans un cas très particulier il est vrai, a été introduite pour la première fois, à ma connaissance du moins, par G. HESSENBERG, dans un mémoire très curieux intitulé *Kettentheorie und Wohlordnung*<sup>1</sup>. Hessenberg envisage surtout des ensembles des trois premiers rangs, qu'il appelle « Mengen erster, zweiter und dritter Stufe. »

Du reste, cette notion de rang apparaît déjà, bien qu'implicitement, dans les premières recherches sur la théorie des ensembles, celles de Dedekind et de Cantor. Lorsque Cantor envisage, par exemple, l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné M, il passe d'un ensemble de rang *un* à un ensemble de rang *deux*, et il importe précisément de ne pas confondre l'ensemble ainsi formé, dont

<sup>1</sup> J. reine angew. Math., 135, p. 81, 1908.

les éléments sont des sous-ensembles et dont le rang est *deux*, avec l'ensemble de ses noyaux, dont le rang est *un* et qui ne diffère pas de *M*.

De même, lorsque DEDEKIND définit l'ensemble somme  $A + B + C \dots$ , il se rend très bien compte de la distinction dont je viens de parler, car il ajoute : « Wir bemerken ferner, dass das aus *A, B, C, ...* zusammengesetzte System wohl zu unterscheiden ist von demjenigen System, dessen Elemente die Systeme *A, B, C, ...* selbst sind<sup>1</sup>. »

On voit donc que l'introduction des notions de rang et de type de structure s'imposait dès le début de la théorie cantorienne. La première de ces notions n'a été précisée par G. Hessenberg que dans la mesure où elle pouvait lui être utile dans l'étude des problèmes particuliers qu'il avait en vue.

K. GRELLING, dont les recherches se rattachent à celles de Hessenberg, a été plus loin dans cette voie. Amené dans son étude sur les axiomes de l'arithmétique à comparer les ensembles de même rang, il introduisit la notion d'ensembles *congruents* qui, dans le cas spécial qu'il envisage, ne diffère pas de celle d'ensembles isomorphes<sup>2</sup>. Mais lui aussi s'est borné à des ensembles de rangs très petits, et n'a pas cherché à étendre cette notion à des ensembles de rang quelconque.

En fait, l'importance des notions de rang et de type de structure apparaît, comme nous l'avons vu, au delà des cas particuliers envisagés par Hessenberg et Grelling.

2. *Notion d'existence*. « En mathématiques — a dit POINCARÉ — le mot *exister* ne peut avoir qu'un sens : il signifie *exempt de contradiction*<sup>3</sup>. » Sur ce point tout le monde est à peu près d'accord aujourd'hui, mais il faudrait préciser. Quel est, dans chaque cas particulier, le champ, ou domaine (Denkbereich, suivant König) à l'intérieur duquel notre pensée doit pouvoir évoluer librement sans qu'aucune contradiction n'éclate ? Quelles sont les opérations qu'on a le

<sup>1</sup> Was sind und was sollen die Zahlen, Brunswick, 3<sup>e</sup> éd., 1914, p. 3.

<sup>2</sup> Thèse, Göttingue, 1910. Cf. A. SCHÖENFLIES, Entw. der Mengenlehre, 1913, p. 17.

<sup>3</sup> Science et Méthode, 1909, p. 162.

droit d'appliquer aux définitions initiales? Il serait difficile de donner une réponse précise à ces questions. Si, en effet, les formes logiques, qui toutes dérivent d'un petit nombre de formes dites fondamentales, peuvent être regardées comme immuables, les axiomes et les postulats, bien que soumis à certaines conditions, varient à l'infini, et il est rare qu'on puisse en dresser une liste complète. A côté des choses qu'on a postulées explicitement se glissent souvent sans qu'on s'en doute des postulats qui ont échappé à notre contrôle. En principe, le choix des hypothèses sur lesquelles on s'appuie devrait être déterminé univoquement par les définitions initiales, mais les définitions s'expriment à l'aide de mots dont il n'est pas toujours facile de préciser le sens. Ces questions ont déjà été examinées et discutées. Je me bornerai à renvoyer aux articles de H. Poincaré insérés dans la *Revue de métaphysique et de morale*, et au livre déjà cité de J. König.

Dans la théorie des ensembles, le problème se présente sous un aspect particulier, mais les difficultés que je viens de signaler subsistent. Ici encore il importe de délimiter le champ que notre pensée peut parcourir, et il n'est pas toujours aisé de le faire d'une manière précise.

Envisageons, par exemple, avec J. König, l'ensemble E de tous les *Dinge* (choses). Cet ensemble existe-t-il? Si l'on regarde comme faisant partie des *Dinge* les ensembles de première sorte de Russell, et si l'on fait intervenir dans le champ de notre pensée les propriétés caractéristiques de ces ensembles, on se heurte à une antinomie analogue à celle de Russell; l'ensemble E n'existe pas.

Si au contraire, par une convention assez artificielle, on réduit le champ assigné à notre pensée à ce minimum que J. König définit à la p. 150 de son ouvrage, on n'aura plus le droit de s'appuyer sur les propriétés des ensembles de première sorte, et l'antinomie de Russell ne se présentera plus. Resterait à voir si à l'intérieur du champ ainsi rétréci nous n'avons pas laissé subsister quelque antinomie plus profonde, et si l'ensemble des *Dinge* au sens nouveau est bien, comme l'affirme J. König, exempt de toute contradiction.

Quoi qu'il en soit, on voit combien il importe de préciser le sens des termes qui interviennent dans les définitions.

Je rappelle qu'il y a lieu de distinguer plusieurs sortes, ou modes de définition. Lorsqu'il s'agit d'un ensemble, le mode de définition qui se présente d'abord à notre esprit, mode sur lequel notre intuition s'appuie le plus souvent, est celui qui consiste dans l'énumération ou l'adjonction successive des éléments. L'ensemble est donné ou défini *en extension*; bien entendu, ce mode de définition n'est applicable qu'aux ensembles finis.

Une autre sorte de définition, de portée plus grande, consiste à donner une propriété caractéristique commune à tous les individus de l'ensemble qu'on envisage; l'ensemble est alors défini *en compréhension*. Du reste, les deux modes de définition peuvent être utilisés à la fois.

Une autre distinction, d'une nature différente, qu'il importe de ne pas perdre de vue dans l'étude des antinomies cantorienne, a été mise en lumière par H. Poincaré<sup>1</sup>. De même qu'en algèbre un nombre  $x$  est donné tantôt explicitement, c'est-à-dire à l'aide d'opérations déterminées effectuées sur des nombres connus

$$x = f(a, b, c, \dots) ,$$

tantôt implicitement, c'est-à-dire à l'aide d'une équation, qu'on peut supposer écrite sous la forme

$$x = f(y, z, \dots a, b, c, \dots) ,$$

$y, z, \dots$  étant des fonctions données de  $x$ , de même l'opération de réunion relative à un ensemble  $E$  peut porter ou bien sur des éléments définis indépendamment de  $E$ , et dans ce cas

$$E = (a, b, c, \dots) \tag{A}$$

ou bien sur des éléments dont quelques-uns sont liés d'une manière déterminée à  $E$ , et alors

$$E = (y, z, \dots a, b, c, \dots) \tag{B}$$

où  $y, z, \dots$  dépendent de l'ensemble  $E$ .

<sup>1</sup> H. POINCARÉ, Dernières Pensées, chap. V.

La définition de  $E$  est prédicative dans le premier cas ; elle est non-prédicative dans le second, mais j'éviterai de me servir de ces termes, dans ce travail du moins.

A la catégorie (B) appartiennent les ensembles de la forme

$$E = (E, a, b, c, \dots)$$

dont j'ai donné plusieurs exemples dans mes notes antérieures.

Mais revenons à la notion d'existence. Nous avons vu que les contradictions cantorienne peuvent disparaître, ou du moins changer de forme, lorsqu'on fait abstraction de certaines propriétés des éléments de  $E$ .

Supposons, par exemple, que l'ensemble  $E$  soit formé de deux éléments  $A$  et  $B$  : l'élément  $A$  existe par hypothèse, l'élément  $B$  est l'ensemble de Russell. L'ensemble  $E$  existe-t-il ?

Cela dépend du champ imposé par la définition.

L'ensemble  $E$  n'existe pas si l'on tient compte des propriétés caractéristiques de l'élément  $B$  ; il existe si l'on en fait abstraction.

Les contradictions de cette sorte ne présentent pas d'intérêt, lorsque l'ensemble  $E$  appartient à la catégorie (A) ; car de deux choses l'une : ou bien l'élément  $a$  impliquant contradiction est un ensemble, et alors le problème se déplace et se simplifie, ou bien  $a$  n'est pas un ensemble, et alors on sort du domaine cantorien.

Nous pourrions donc, sans nuire à la généralité, nous borner à l'étude des ensembles dont les éléments existent. C'est là une condition qu'on introduit presque toujours, du moins implicitement. Qu'un ensemble  $E$  soit défini en extension ou en compréhension, notre choix ne portera donc, par définition, que sur des éléments  $a, b, c, \dots$  exempts de contradiction.

Mais cette convention peut compliquer le problème, lorsque l'ensemble  $E$  appartient à la catégorie (B), car elle peut introduire une relation nouvelle entre les éléments  $y, z, \dots$  et l'ensemble  $E$ .

3. *Remarques sur quelques postulats.* Parmi les postulats sur lesquels je me suis appuyé dans ma note sur les antinomies de Russell et de Burali-Forti figure la propriété suivante, que j'ai appelée propriété 1 : l'existence d'un ensemble entraîne celle de tous ses sous-ensembles<sup>1</sup>.

On peut la regarder comme un cas particulier de l'axiome III de ZERMELO, bien que le point de vue de Zermelo soit très différent du mien<sup>2</sup>. Je l'admets pour les ensembles que j'étudie dans ma note. Mais ce postulat, que j'ai admis sans discussion, peut-il être regardé comme une proposition à démontrer ? Est-il plus commode, au contraire, de l'envisager comme une sorte de définition plus large du mot exister ? Nous verrons que les deux attitudes peuvent être justifiées.

Bien entendu, la propriété 1 implique une condition que l'on sous-entend toujours, et que Zermelo a essayé de préciser.

Soit  $R = (a, b, c, \dots)$  un ensemble exempt de contradiction ; les éléments  $a, b, c, \dots$ , indécomposables ou non, existent. Pour définir un sous-ensemble  $E'$  de  $E$ , on donne ordinairement une propriété  $P$  caractéristique des éléments de  $E'$  (je laisse de côté le cas peu intéressant où les éléments de  $E'$  sont donnés séparément). Le sous-ensemble  $E'$  est constitué alors par les éléments de  $E$  qui possèdent la propriété  $P$ .

Voici alors en quoi consiste la condition que j'ai en vue : un élément quelconque  $a$  de  $E$  étant donné, on peut toujours reconnaître sans ambiguïté si cet élément possède la propriété  $P$ .

Cette condition ne diffère pas au fond de celle qui est contenue dans la définition classique de la notion d'ensemble, mais si dans la définition de Cantor les objets parmi lesquels on a à choisir sont supposés quelconques, ici ils font partie d'un ensemble  $E$  qui existe ; nous n'avons donc pas à nous assurer qu'ils sont exempts de contradiction, car ils existent

<sup>1</sup> *Ens. math.*, t. 19, 1917, p. 44.

<sup>2</sup> *Math. Annalen*, t. 65, 1908, p. 261-281.

par hypothèse : leur existence est antérieure à celle du sous-ensemble  $E'$ .

La condition que je viens de rappeler est-elle suffisante ? Je m'explique. Supposons qu'un ensemble  $E$  existe, c'est-à-dire qu'il soit exempt de contradiction dans un champ déterminé qui comprend par hypothèse les champs partiels relatifs à ses éléments. Supposons de plus que la propriété spécifique  $P$  caractéristique des éléments d'un sous-ensemble  $E'$  vérifie la condition que j'ai rappelée. Avons-nous le droit d'affirmer que  $E'$  existe ?

La réponse serait immédiate si le champ de  $E'$  faisait partie du champ de  $E$  ; mais le premier ne s'emboîte pas nécessairement dans le second.

Il est vrai que les champs partiels des éléments de  $E'$  font partie du champ de  $E$ . Mais le champ de  $E'$  comprend encore les propriétés de cet objet nouveau que nous avons appelé  $E'$ , et ces propriétés sont extérieures aux champs partiels ; elles ne font pas nécessairement partie du champ de  $E$ .

Dans ces conditions, notre postulat ne résulte pas immédiatement des conventions introduites, et l'on pourrait chercher à le démontrer, en délimitant le champ de  $E$ , et en précisant les conditions auxquelles doit satisfaire la propriété spécifique  $P$ .

Mais un autre point de vue est admissible. On pourrait, par convention, faire entrer dans le champ de  $E$  non seulement les champs relatifs à ses éléments  $a, b, \dots$ , mais encore les champs plus vastes relatifs à ses sous-ensembles, en supposant toujours que les propriétés spécifiques  $P$  vérifient la condition essentielle que j'ai rappelée.

Dans ce cas, la propriété 1 est vraie par définition : un sous-ensemble  $E'$  existe, parce que l'existence de  $E$  implique par définition celle de  $E'$  ; nous avons élargi le champ de  $E$  par l'adjonction des champs relatifs aux sous-ensembles de  $E$ . Je n'insiste pas sur les inconvénients que peut présenter cette manière de voir.

J. König s'est-il placé à ce point de vue ? Je ne saurais l'affirmer ; j'aime mieux renvoyer le lecteur à ses « Neue Grundlagen », p. 172.



Dans un travail déjà cité, M. Zermelo a cherché à préciser la condition à laquelle doit satisfaire la propriété spécifique P. Je rappelle que ce mémoire a été analysé par H. Poincaré dans le chapitre IV (La logique de l'infini) de ses « Dernières Pensées ».

Quoi qu'il en soit, j'ai admis la propriété 1 sans discussion, de même que j'ai admis sans discussion les trois postulats sur lesquels je me suis appuyé dans la seconde partie de ma note sur les antinomies de Russell et de Burali-Forti, car c'est le problème fondamental, et non la discussion des postulats, que j'avais en vue dans ce travail. Je voulais montrer que mes postulats pouvaient suffire dans le cas particulier que j'avais à traiter.

Du reste, à part le troisième, ces postulats, sous une forme un peu différente, ont déjà été utilisés, entre autres par Zermelo, Hessenberg, J. König, et analysés par H. Poincaré. Je rappelle que mon postulat 1 correspond à l'axiome IV de Zermelo, et le postulat 2 à son axiome V. Quant au postulat 3, on s'en est servi implicitement.

A ces postulats s'appliquent en partie les remarques que j'ai faites à propos de la propriété 1, et cela est vrai surtout du postulat 3. Dans ce postulat, la loi de correspondance doit être définie sans ambiguïté. Et la même question se pose que tout à l'heure : cette condition est-elle suffisante ?

## CHAPITRE II.

4. *Remarques sur les antinomies cantorienne.* Les antinomies cantorienne ont été parfois comparées aux arguments de Zénon d'Elée et aux antinomies kantienne. Qu'il s'agisse de l'ensemble de Russell ou de l'antonomie de Burali-Forti, ou encore de l'exemple si curieux donné par M. Richard, des contradictions en apparence irréductibles éclatent entre les conclusions qui nous semblent également légitimes.

Qu'un raisonnement correct aboutisse à une contradiction, le fait n'a rien de surprenant par lui-même. Une contradic-