Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

Autor: Buhl, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

réels[1]. Ainsi comprise l'analyse axiomatique cherche à substituer aux notions intuitives et expérimentales, souvent confuses, des idées claires et distinctes. Par là elle se trouve prolonger non seulement la méthode de Descartes, mais aussi celle de la science grecque. Dès lors la conclusion suivante semble s'imposer:

En même temps qu'elle retourne aux données immédiates de l'expérience sensible, la physique de la relativité cherche à les axiomatiser et c'est pourquoi elle se rencontre avec les tendances à la fois réaliste et logique des penseurs grecs de l'antiquité.

LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

PAR

A. BUHL (Toulouse).

L'*Enseignement mathématique* n'ayant publié jusqu'ici qu'un excellent mais unique article sur les théories relativistes, celui de M. T. LEVI-CIVITA (t. XXI, 1920, pp. 5–28), il m'est venu à l'idée de faire, à mon tour, un exposé, *très bref* et *purement pédagogique*, répondant d'abord à la préoccupation suivante: *Comment un professeur d'Analyse infinitésimale ou de Mécanique rationnelle peut-il, sans changer essentiellement son cours et en un petit nombre de leçons, exposer la Gravifique einsteinienne* ?

Cette préoccupation me paraît devoir exister surtout en France où les cours de Physique mathématique n'abondent pas et où un professeur, surtout dans les Facultés de province, ne se sent pas toujours absolument libre d'enseigner à sa fantaisie et selon ses travaux personnels.

Parmi les causes qui m'ont amené à enseigner les théories nouvelles, je dois faire une place importante à la simple curiosité des élèves. Et je ne parle pas seulement des miens. Dans l'enseignement secondaire, des collègues ont été aussi harcelés de

---

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale.* Le théorème de Pythagore, p. 23, année 1923.

questions, souvent sous la pression des parents qui, à force de rencontrer Einstein dans la presse quotidienne, engageaient leur fils à rapporter des éclaircissements du Collège ou du Lycée. Bien des professeurs ont été embarrassés et, comme ma mission est surtout de former des professeurs, j'ai entrepris d'éclairer les candidats au professorat.

Je crois l'avoir fait en donnant l'impression de la facilité.

Un point de vue, qui me semble très élémentaire, consiste à rattacher l'électromagnétisme et la gravifique aux principes mêmes de l'Analyse, aux formes différentielles, aux déterminants fonctionnels, bref à toutes ces choses qui naissent immédiatement dès que l'on tente de transformer des intégrales. Un cours classique dans lequel on introduit la Physique mathématique, sous de telles espèces, n'en est pas plus altéré que celui de M. E. Picard par les développements concernant le potentiel newtonien ou que celui de M. P. Appell par le chapitre concernant les formules de Stokes et de Green.

Irais-je jusqu'à laisser croire que je m'imagine que l'exposé qui suit doit être considéré comme un modèle ? Nullement ! Nous croyons, au contraire, M. Fehr et moi, que cet article doit jouer surtout un rôle d'amorce et en appeler d'autres, autant que possible dans les mêmes conditions de brièveté, articles à provenir de collègues qui se seront également trouvés dans les conditions ci-dessus indiquées et dont les expériences personnelles, en s'ajoutant, conduiront à de nouveaux exposés de plus en plus simples et intéressants.

Disons aussi que nous accueillerons avec plaisir les auteurs qui, sans faire un exposé général, nous enverrons des remarques ou notes qui pourront être insérées dans la Chronique ou la Correspondance de la *Revue*.

I. — Identités et Formules stokiennes fondamentales.

Les identités fondamentales dont il s'agit peuvent être considérées comme exprimant des principes fondamentaux du Calcul intégral; ce sont

$$\int_C X dY = \iint_A dX\, dY \ , \qquad \iint_S X dY dZ = \iiint_V dX\, dY dZ \ . \qquad (1)$$

Par des changements de variables et des combinaisons linéaires des nouvelles identités obtenues, on obtient des formules qui généralisent la formule de Stokes ordinaire, qui existent dans tous les hyperespaces et que je désigne sous la dénomination générale de *formules stokiennes*. La première identité (1), dans l'espace E_4 à quatre dimensions, donne

$$\int_C \sum P_i \, dx_i = \int\int_A \frac{\Delta_1 \, dx_1 \, dx_2}{\dfrac{\partial(F\,,\,G)}{\partial(x_3\,,\,x_4)}} \tag{2}$$

en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} .$$

La variété A, d'équations $F = 0$, $G = 0$, a deux dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière C invariable.

De même la seconde identité (1) donne, dans E_4,

$$2\int\int_S \sum M_{ij} \, dx_i \, dx_j = \int\int\int_V \frac{\Delta_2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}} \tag{3}$$

en posant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} .$$

La variété V, d'équation $F = 0$, a trois dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière S, à deux dimensions, invariable.

Le mineur

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Nous rencontrerons d'autres développements de déterminants à effectuer de manière analogue; l'indice ω sera dit *indice de substitution.*

Dans le premier membre de (3), l'assemblage d'indices ij conduit à *six* termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34. On a toujours

$$M_{ii} = 0 .$$

En résumé, *nous partons des identités* (1) *ou bien*, ce qui n'est pas dire plus mais ce qui est plus explicite, *de deux formes différentielles*

$$\sum P_i dx_i , \qquad \sum M_{ij} dx_i dx_j \tag{4}$$

l'une linéaire, l'autre bilinéaire. C'est tout ce dont nous avons besoin, au point de vue des fondements essentiels, pour établir les formules générales de l'électromagnétisme et de la gravifique.

II. — Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant Δ_1; d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{Vmatrix} . \tag{5}$$

Soit l'égalité

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ {}_iP_{\alpha} & {}_jP_{\alpha} \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Le déterminant en ∂ est l'un des mineurs de (5) ; le dernier déterminant, comme on le concevra sans peine, est à développer en

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ji} P_{\alpha} ,$$

ce qui est identiquement nul si

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ji} . \tag{7}$$

Cette hypothèse (7) sera toujours maintenue.

Donc, dans (6), rien ne généralise *le déterminant en* ∂; mais ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (6) on a, par considération des termes homologues et *par définition, des dérivées*, en D, *de composantes vectorielles* P_j,

$$\frac{DP_j}{Dx_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} . \tag{8}$$

A la formule (6) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} \\ {}^{i}P^{\alpha} & {}^{j}P^{\alpha} \end{vmatrix} \tag{9}$$

d'où, de même et *par définition, des dérivées, en* D, *d'autres composantes* P^j,

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} . \tag{10}$$

Cette fois le dernier déterminant de (9) n'est pas nul ce qui est une des raisons qui font distinguer les P^j des P_j. Mais (10) va cependant se justifier tout aussi bien que (8).

Formons

$$P^j \frac{DP_j}{Dx_i} + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} P^j + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} P_j .$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité se détruisent *si* α *et* j *sont considérés à la fois comme des indices de sommation.*

Donc les dérivées en D, (8) et (10), sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles:

1° *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans* Δ_1, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2° *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) = P^j \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + P_j \frac{\partial P^j}{\partial x_i} \tag{11}$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ *par des* D.

Bien entendu, il reste acquis, une fois pour toutes, que les α sont indices de sommation dans les formules (8) et (10) et même que tout indice qui figure deux fois dans un même terme est indice de sommation.

En (11) apparaît pour $P^j P_j$ une propriété qui est aussi bien vraie pour $P^j Q_j$, comme on le vérifie immédiatement; de telles expressions sont des *invariants* en Calcul tensoriel.

Les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{DP_j}{Dx_i}dx_i &= dP_j - \Gamma_{ij}^{\alpha} P_\alpha dx_i = 0 \ , \\ \frac{DP^j}{Dx_i}dx_i &= dP^j + \Gamma_{i\alpha}^{j} P^\alpha dx_i = 0 \ , \end{aligned}\right. \tag{12}$$

manifestement construites à partir de (8) et (10), sont celles du *déplacement parallèle* de Weyl, Levi-Civita, Eddington. On pourrait déjà songer à préciser la nature des fonctions Γ_{ij}^{α} mais ce n'est pas encore indispensable; au contraire, ces fonctions, qui sont au nombre de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dans E_n, c'est-à-dire de 40 dans E_4, tendent à servir de base, actuellement, à une gravifique généralisée en laquelle il convient de les laisser d'abord indéterminées.

Si, dans la seconde équation (12), on imagine que la composante vectorielle P^j soit le déplacement infinitésimal dx_j, cette équation devient

$$d^2 x_j + \Gamma_{\alpha i}^{j} dx_\alpha dx_i = 0 \ . \tag{13}$$

C'est celle des *géodésiques*. Là encore, bien entendu, ce ne seront les géodésiques de variétés géométriques, au sens habituel du mot, que quand les fonctions Γ seront convenablement déterminées mais il n'en est pas moins fort remarquable que *la forme* des équations des géodésiques, *la forme* des équations du déplacement parallèle, *la forme* des dérivées en D, sont *des formes* contenues implicitement dans la matrice (5), c'est-à-dire, si l'on veut, dans la notion de tourbillon euclidien ou, ce qui revient au même, dans la formule stokienne (2) issue elle-même de la première identité (1).

III. — Champ électromagnétique général.

Prenons maintenant la seconde formule stokienne, c'est-à-dire (3). Il y a deux circonstances, absolument distinctes, qui rendent nul Δ_2 et, par suite, les deux membres de la formule.

1° On n'impose d'abord aucune condition aux M_{ij} mais $\Delta_2 = 0$ a lieu par choix de la variété V, c'est-à-dire de la fonction F qui satisfait alors à une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, linéaire et homogène. Les équations des caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} M_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{23} &= -\rho V_{x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} M_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{34} &= \rho V_{x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_4} M_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{41} &= -\rho V_{x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12} &= \rho \quad , \end{aligned}\right. \tag{14}$$

en posant

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad V_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad V_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4}$$

et en désignant par ρ un facteur de proportionnalité.

Les équations (14) constituent le *premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles correspondent à un E_4 qui contient des V_3 spéciales.

2° On obtient $\Delta_2 = 0$ en annulant, dans Δ_2, les mineurs de la première ligne. Alors on a des M_{ij} spéciaux, que nous appellerons des M^*_{ij}, pour lesquels

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{23} &= 0\ , \\ \frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{34} &= 0\ , \\ \frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{41} &= 0\ , \\ \frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{12} &= 0\ . \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces M^*_{ij} existent évidemment; ils sont de la forme

$$M^*_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\ ,$$

les Φ_i étant dits *potentiels électromagnétiques.*

Les équations (15) constituent *le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles expriment que $M^*_{ij}\,dx_i\,dx_j$ est une différentielle *exacte* dans E_4.

IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.

Imaginons que l'on réduise la généralité précédente en posant

$$\begin{array}{llll} M_{12} = \mathbf{d}_z\ , & M_{14} = -\,c\mathbf{h}_x\ ; & M^*_{12} = \mathbf{h}_z\ , & M^*_{14} = c\mathbf{d}_x\ , \\ M_{23} = \mathbf{d}_x\ , & M_{24} = -\,c\mathbf{h}_y\ ; & M^*_{23} = \mathbf{h}_x\ , & M^*_{24} = c\mathbf{d}_y\ , \\ M_{31} = \mathbf{d}_y\ , & M_{34} = -\,c\mathbf{h}_z\ ; & M^*_{31} = \mathbf{h}_y\ , & M^*_{34} = c\mathbf{d}_z\ . \end{array}$$

Alors, en écrivant x, y, z ,t pour x_1, x_2, x_3, x_4, et c étant une constante, les équations (14) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\left(\rho\mathbf{V}_x + \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial t}\right)\ , \\ \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\left(\rho\mathbf{V}_y + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial t}\right)\ , \\ \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} &= \frac{1}{c}\left(\rho\mathbf{V}_z + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial t}\right)\ , \\ \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} &= \rho\ . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

De même les équations (15) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t} , \\
&\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t} , \\
&\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t} , \\
&\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0 .
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Bien que la notation vectorielle n'ait rien d'indispensable, elle intervient ici commodément pour rassembler les systèmes (16) et (17) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} , \qquad \operatorname{div} \mathbf{d} = \rho , \qquad \mathbf{s} = \frac{\rho}{c}\mathbf{v} , \\
&\operatorname{rot} \mathbf{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} , \qquad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 .
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Telles sont les équations de Maxwell-Lorentz qui, à vrai dire, sont aussi bien celles de Faraday-Ampère.

Des deux dernières on conclut $\mathbf{h} = -\operatorname{rot} \mathbf{f}$ et

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = 0 , \qquad \mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla\varphi ,$$

si ∇ désigne l'opération $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ qui s'applique à une quantité $\varphi(x, y, z, t)$ scalaire.

Portant dans la première équation (18), on a

$$-\operatorname{rot}^2 \mathbf{f} = -\nabla^2 \mathbf{f} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{f} = \mathbf{s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Avec la *relation supplémentaire de Maxwell*

$$\operatorname{div} \mathbf{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 , \tag{19}$$

il reste *l'équation vectorielle*

$$-\nabla^2 \mathbf{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{s} . \tag{20}$$

Enfin, la seconde équation (18) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho ,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho . \tag{21}$$

On voit que l'étude des équations (18) est ramenée à celle de (19), (20), (21).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

V. — Optique. — Rélativité restreinte.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur $\mathbf{v}$, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres de (16), que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Alors les équations (16) et (17) sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a \cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) ,$$

tous les autres $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété: celle de ne changer en rien quant t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (20) et (21) rentrent dans la forme unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 . \tag{22}$$

Nous n'aurons plus alors, dans la théorie, que des fonctions U satisfaisant à cette équation.

Ecrivons la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = 0 .$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l'^2}$$

si

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + l \sin\theta , \\ l' = -x \sin\theta + l \cos\theta , \end{cases} \tag{23}$$

En posant

$$\operatorname{tang}\theta = i\frac{v}{c} , \qquad l = ict , \qquad l' = ict' ,$$

on conclut définitivement que l'équation (22) et, par suite, toutes ses solutions U sont conservées par la transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \qquad y' = y , \qquad z' = z , \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

C'est la *transformation de Lorentz*; elle équivaut, de par (23), à une *rotation imaginaire* et, comme toute rotation, engendre un *groupe*. On aurait pu l'étudier directement sur les équations de Maxwell-Lorentz (pour $\rho = 0$) sans passer par l'équation (22) mais comme cette dernière est l'équation fondamentale de la théorie ondulatoire il est hautement préférable, dans un exposé pédagogique, de ne pas se priver de montrer que la théorie ondulatoire de la lumière est aussi un cas particulier des généralités ici invoquées.

Il n'entre point dans le plan de cet article de discuter longuement les conséquences de la transformation de Lorentz; on ne l'a fait que trop souvent et en embrouillant les choses les plus simples.

Ainsi, pour la *contraction de Lorentz*, il suffit de remarquer que si l'éloignement de deux observateurs varie avec une certaine vitesse (ici v), ils se voient *réciproquement* diminués en dimension aussi bien du fait de la vitesse que du fait de l'éloignement.

Pour l'éloignement tout le monde admet cela; en quoi est-ce plus étrange pour la vitesse ? Rien de plus suggestif que cet exact rapprochement entre la perspective ordinaire et la cinématique lorentzienne.

VI. — Dérivées en D d'expressions a deux indices.

Revenons maintenant à la seconde formule stokienne (3) et plus particulièrement à son déterminant Δ_2 qui nous a déjà donné le champ électromagnétique général. Il s'agit de lui faire donner les formules de gravitation proprement dites.

Considérons, dans Δ_2, les mineurs des termes de la première ligne. On ne les altère pas en les écrivant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}$$

car les deux derniers déterminants sont identiquement nuls. Bien entendu on a toujours l'hypothèse (7) et les i, j, k libres viennent, dans les développements, prendre la place des ω. Remarquons aussi tout de suite, que les présents raisonnements ne supposent plus aucune relation entre M_{ij} et M_{ji}.

Convenons maintenant que l'expression précédente, à trois déterminants, s'écrive

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} . \tag{24}$$

La simple identification donne des formules rentrant toutes dans le type

$$\frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^\alpha_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^\alpha_{ij} M_{\alpha k} . \tag{25}$$

On peut ensuite étendre les raisonnements du paragraphe II. Dans (24) et dans l'expression qui précède (24) relevons partout les deux indices des M cependant que, dans les Γ, on échangera α et ω.

Les déterminants contenant les Γ seront, de plus, changés de signe.

On définit ainsi des M^{jk} à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^k_{i\alpha} M^{j\alpha} + \Gamma^j_{i\alpha} M^{\alpha k} . \tag{26}$$

Dans ce second cas, les déterminants en Γ ne sont pas nuls mais on achève de justifier (26) en remarquant que

$$N^{jk} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{D}{Dx_i} N^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (N^{jk} M_{jk})$$

si j, k, α sont indices de sommation.

Enfin reprenons l'égalité de (24) et des trois déterminants qui précèdent (24). Dans (24) et les deux premiers déterminants des trois autres relevons les indices i, j, k des M, sans toucher aux Γ; dans le dernier déterminant, relevons les α des M, intervertissons α et ω dans les Γ et changeons le signe de ce déterminant.

On définit ainsi des M^j_k à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - \Gamma^\alpha_{ik} M^j_\alpha + \Gamma^j_{i\alpha} M^\alpha_k . \tag{27}$$

Celle-ci est finalement construite de telle manière que

$$N^k_j \frac{D}{Dx_i} M^j_k + M^j_k \frac{D}{Dx_i} N^k_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(N^k_j M^j_k\right) .$$

Donc les dérivées en D, (25), (26), (27) sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles (*Cf.* paragraphe II):

1º *On n'altère pas la seconde formule stokienne si, dans* Δ_2, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2º *Les dérivées partielles de* $N^{jk} M_{jk}$ *et de* $N^k_j M^j_k$ *s'expriment en* D *comme en* ∂.

Remarquons aussi que les formules (25), (26), (27), comme d'ailleurs (8) et (10), sont indépendantes de considérations métriques ou mieux qu'elles tendent à engendrer ces considérations plutôt qu'à en naître. En effet, nos M à deux indices conduisent maintenant à des M_{ii} qui ne sont plus nuls si bien que, de la forme *bilinéaire* écrite en (4), naît une forme *quadratique*. Les coefficients de celle-ci, avec des notations analogues à celles du paragraphe III, pourraient s'appeler des M_{ij}^{**}. Pour nous conformer aux habitudes, nous les appellerons des g_{ij} et la forme quadratique maintenant apparue sera

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j \,. \tag{28}$$

C'est d'elle que procèdent la géométrie métrique et la gravitation.

Enfin des généralisations peuvent s'apercevoir. Ainsi dans l'expression à trois déterminants du début de ce paragraphe, *les fonctions Γ n'ont pas besoin d'être les mêmes dans les deux derniers déterminants.* Il est fort intéressant de rechercher ce qui peut se conserver des résultats subséquents quand ces Γ diffèrent. Mais c'est encore une chose qui sortirait des limites de cet exposé pédagogique (*Cf. Annales de Toulouse*, 3e Mémoire).

Remarquons encore que la théorie des dérivations en D n'est qu'un prolongement de celle des déterminants.

VII. — Symboles a quatre indices.

Jusqu'ici la dérivation en D semble avoir été instituée pour conserver des formules en ∂. Elle ne peut cependant les conserver toutes, sous peine de ne pas être une véritable généralisation. Parmi les choses qu'elle ne conserve pas, il faut signaler, en tout premier lieu, l'*interversion des dérivations.*

Ainsi traitant les dérivées en D, (8) et (10), comme les expressions à deux indices du paragraphe précédent, il vient, après des calculs simples et quelques permutations d'indices,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_j} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{DP}_k}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{DP}_k}{\mathrm{D}x_j} \end{vmatrix} = \mathrm{P}_\alpha \mathrm{B}^\alpha_{kji} \,, \tag{29}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_j} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{DP}^k}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{DP}^k}{\mathrm{D}x_j} \end{vmatrix} = \mathrm{P}^\alpha \mathrm{B}^k_{\alpha ij} \,, \tag{30}$$

$$\mathrm{B}^\alpha_{kji} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^\alpha_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^\alpha_{kj} + \Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{jk}\Gamma^\alpha_{\beta i} \,. \tag{31}$$

VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.

Maintenant que nous avons constaté que la dérivation d'expressions à deux indices conduisait à percevoir l'existence d'une forme quadratique (28), il reste à s'expliquer sur les coefficients g_{ij} de celle-ci et sur le choix des fonctions Γ jusqu'ici complètement indéterminées. C'est là que peuvent intervenir diverses hypothèses auxquelles correspondent diverses théories gravifiques.

L'hypothèse la plus simple, à laquelle correspond la géométrie de Riemann, consiste à admettre que toutes les dérivées en D des g_{ij} sont nulles. Ceci entraîne, d'après les formules du paragraphe VI, que des g^{ij} et des g^i_j ont également leurs dérivées en D identiquement nulles, si g^{ij} est le quotient par g du mineur de g_{ij} dans le déterminant g des g_{ij} et si

$$g^i_j = g^{\alpha i} g_{\alpha j} = \begin{cases} 0 , & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 , & \text{si} \quad i = j \end{cases} . \tag{32}$$

Rappelons que l'équation

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - g_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{ij} = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = 0 ,$$

donne

$$2\begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} .$$

On a ainsi

$$\Gamma^\alpha_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix} i\,k \\ \beta \end{bmatrix} .$$

Les B à quatre indices exprimés en (31) sont alors les composantes de la courbure riemannienne, courbure dont la théorie pourrait être ici esquissée rapidement. Allons plus directement au but en utilisant l'opérateur (32) qui, aux B à quatre indices, fera correspondre des G à deux indices seulement (contraction; *Verjüngung*), soit

$$\mathrm{G}_{\alpha i} = g^k_j \mathrm{B}^k_{\alpha ij} .$$

Ces G sont encore des composantes de courbure, ce que, par exemple, on peut vérifier aisément dans le cas d'une surface ordinaire sur laquelle on aurait

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2 \;.$$

Alors $g^{\alpha i}\,\mathrm{G}_{\alpha i}$ correspond à la courbure totale de la surface.

Pour revenir au cas général, l'essentiel est que l'on tient maintenant des $\mathrm{G}_{\alpha i}$ et des $g_{\alpha i}$ qui sont en même nombre (10 dans E_4); l'équation

$$\mathrm{G}_{\alpha i} = 0 \;, \tag{33}$$

qui est la plus simple des lois de gravitation, exprime un mode de courbure de l'espace-temps qui est vraisemblablement le plus simple. Cette équation permet la détermination des $g_{\alpha i}$, c'est-à-dire d'un ds^2 auquel correspondent des géodésiques-trajectoires, etc.

Nous n'irons pas plus loin dans cette voie car l'exposition que nous aurions à faire pour continuer ne différerait pas de celles déjà faites par maints auteurs.

Terminons par quelques remarques analytiques.

Pour arriver à (33), il vaut mieux passer par (30) que par (29). En effet, former les G à partir de (29) c'est faire, dans le second membre $\alpha = i$, opération impossible à indiquer sur le premier membre qui ne porte pas explicitement l'indice α. Il en est autrement, avec (30), pour $k = j$ et l'on pourrait même énoncer la loi de gravitation (33) sous cette forme: *les expressions*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_j} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{DP}^j}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{DP}^i}{\mathrm{D}x_j} \end{vmatrix}$$

sont nulles, quel que soit le vecteur P. Sous cette physionomie, on voit combien la loi est proche des formules stokiennes fondamentales qui ont également servi de base à l'électromagnétisme.

Soyons également très bref sur les déjà nombreuses extensions des théories einsteiniennes. Ainsi A.-S. Eddington (*Math. Theory*, p. 217) pose

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}r_i}\,g_{jk} = 2\mathrm{K}_{jk,\,i}$$

en faisant naître cette formule de considérations métriques inutiles à invoquer ici comme base.

Si $K_{jk.i} = g_{jk}\varkappa_i$, on retrouve la métrique de Weyl; pour $\varkappa_i$ nul celle de Riemann.

IX. — Bibliographie.

Nous n'indiquons ici que les écrits auxquels nous avons fait un emprunt précis pour la rédaction de ce qui précède. Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique ce qui ne nous empêche point de mentionner que ceux qui ont joué le rôle le plus important sont MM. Th. De Donder, A.-S. Eddington, H. Weyl.

A. Buhl. 1° *Sur les formules fondamentales de l'Electromagnétisme et de la Gravifique.* Trois Mémoires (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 1920–1921–1923). 2° *Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1922).

E. Cartan. 1° *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922). Exposé systématique relatif surtout aux formes différentielles. La « dérivation extérieure » revient à la construction des formules stokiennes. Voir une analyse de l'ouvrage dans *L'Enseign. math.* (1921–22, p. 389). 2° *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (« Annales de l'Ecole Normale, 1923). Travail qui, parmi les nombreuses publications de M. Cartan sur le sujet, paraît tout particulièrement d'envergure prodigieuse. Le point de départ est celui que nous avons toujours adopté. « Au fond, écrit M. Cartan (*loc. cit.*, p. 329), les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée ».

Th. De Donder. 1° *Théorie du champ électro-magnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein.* 2° *La Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1920 et 1921). Le premier de ces ouvrages donne les formules (14) et (15) ainsi que toute une théorie précisée dans le second et définitive-

ment mise au point en des *Premiers Compléments* (1922). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1920, p. 237).

P. Dienes. *Sur la structure mathématique du Calcul tensoriel* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1924). Ce travail est de ceux qui montrent que le ds^2 est loin d'être la chose primordiale en analyse tensorielle. Comme ici, les formules de dérivation en D ont une tout autre origine logique.

A.-S. Eddington. 1° *Espace, Temps, Gravitation* (J. Hermann, Paris, 1921). 2° *The mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, 1923). A ces deux ouvrages on peut emprunter très facilement le développement des applications de la loi de gravitation (33). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 86).

E. Goursat. *Leçons sur le problème de Pfaff.* (J. Hermann, Paris, 1922). Mêmes remarques que pour l'ouvrage de M. E. Cartan. Celui de M. Goursat est loin d'être tendancieux au point de vue einsteinien ; il ne s'en occupe point spécialement. Cependant le jeu naturel d'une élégante analyse le conduit (p. 151) aux formules (14). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 316).

R. Leveugle. *Précis de Calcul géométrique.* (Gauthier-Villars, Paris, 1920). Cet ouvrage fournira très simplement les éléments nécessaires à qui voudrait approfondir davantage notre paragraphe IV. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1920, p. 238).

T. Levi-Civita. 1° *Comment un conservateur pourrait-il arriver au seuil de la Mécanique nouvelle* ? (« L'Enseign. math. », 1920). 2° *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* (Rendiconti, Palermo, 1917).

H.-A. Lorentz. *The theory of Electrons and its applications to the phenomena of Light and radiant Heat.* (G.-E. Stechert, New-York; B.-G. Teubner, Leipzig, 1916). Exposé magnifique et d'une très grande clarté. On trouvera, dans les premières pages, le procédé donné ici, au paragraphe IV, pour l'intégration des équations de Maxwell-Lorentz.

H. Poincaré. *Electricité et Optique.* Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. (Gauthier-Villars, Paris). Ces leçons sont des plus suggestives au point de vue de l'histoire de la Science. Elles montrent qu'en 1889, Henri Poincaré en était déjà à l'enseignement classique du *temps local* (p. 530) et de la *contraction de Lorentz* (p. 536). Ces conceptions ont donc précédé de beaucoup les théories einsteiniennes proprement dites, contrairement à ce que semblent croire de nombreuses personnes. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1902, p. 307).

C. Somigliana. *I fondamenti della Relatività* («Scientia», juillet 1923). D'après cet article, la transformation de Lorentz remonterait à 1887, époque où Woldemar Voigt l'aperçut dans le domaine de l'élasticité. Dans cet ordre d'idées, étant donné que la transformation n'est qu'une interprétation très simple d'une rotation, il est probable qu'on pourrait lui trouver des origines encore beaucoup plus lointaines.

H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie* (Vierte Auflage, J. Springer, Berlin, 1921) ou *Espace, Temps, Matière* (A. Blanchard, Paris, 1922). Cet ouvrage expose une géométrie *affine* en connexion profonde avec la théorie des groupes. Il suscite de grands mouvements d'idées qui, en France, semblent surtout se refléter dans les travaux actuels de M. E. Cartan. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 235).

NOTE

Dans l'article de M. Arnold Reymond, qui précède celui-ci, il m'est agréable de voir présenter la théorie relativiste comme une axiomatique qui peut « élaborer le groupe d'axiomes nécessaires et suffisant à l'explication des phénomènes réels » (pp. 267–268).

En effet, dans mon premier Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1920, p. 1), j'écrivais textuellement : Les temps sont proches — s'ils ne sont déjà révolus — où l'on posera les conditions analytiques, nécessaires et suffisantes, pour que les phénomènes physiques puissent être conçus.

A. B.