Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

Autor: Buhl, A.

Kapitel: I. — Identités et Formules stokiennes fondamentales.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

questions, souvent sous la pression des parents qui, à force de rencontrer Einstein dans la presse quotidienne, engageaient leur fils à rapporter des éclaircissements du Collège ou du Lycée. Bien des professeurs ont été embarrassés et, comme ma mission est surtout de former des professeurs, j'ai entrepris d'éclairer les candidats au professorat.

Je crois l'avoir fait en donnant l'impression de la facilité.

Un point de vue, qui me semble très élémentaire, consiste à rattacher l'électromagnétisme et la gravifique aux principes mêmes de l'Analyse, aux formes différentielles, aux déterminants fonctionnels, bref à toutes ces choses qui naissent immédiatement dès que l'on tente de transformer des intégrales. Un cours classique dans lequel on introduit la Physique mathématique, sous de telles espèces, n'en est pas plus altéré que celui de M. E. Picard par les développements concernant le potentiel newtonien ou que celui de M. P. Appell par le chapitre concernant les formules de Stokes et de Green.

Irais-je jusqu'à laisser croire que je m'imagine que l'exposé qui suit doit être considéré comme un modèle ? Nullement ! Nous croyons, au contraire, M. Fehr et moi, que cet article doit jouer surtout un rôle d'amorce et en appeler d'autres, autant que possible dans les mêmes conditions de brièveté, articles à provenir de collègues qui se seront également trouvés dans les conditions ci-dessus indiquées et dont les expériences personnelles, en s'ajoutant, conduiront à de nouveaux exposés de plus en plus simples et intéressants.

Disons aussi que nous accueillerons avec plaisir les auteurs qui, sans faire un exposé général, nous enverrons des remarques ou notes qui pourront être insérées dans la Chronique ou la Correspondance de la *Revue*.

I. — Identités et formules stokiennes fondamentales.

Les identités fondamentales dont il s'agit peuvent être considérées comme exprimant des principes fondamentaux du Calcul intégral; ce sont

$$\int_C \mathrm{X}d\mathrm{Y} = \iint_A d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\ , \qquad \iint_S \mathrm{X}d\mathrm{Y}d\mathrm{Z} = \iiint_V d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}d\mathrm{Z}\ . \qquad (1)$$

Par des changements de variables et des combinaisons linéaires des nouvelles identités obtenues, on obtient des formules qui généralisent la formule de Stokes ordinaire, qui existent dans tous les hyperespaces et que je désigne sous la dénomination générale de *formules stokiennes*. La première identité (1), dans l'espace E_4 à quatre dimensions, donne

$$\int_C \sum P_i \, dx_i = \int\int_A \frac{\Delta_1 \, dx_1 \, dx_2}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x_3, x_4)}} \tag{2}$$

en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix}.$$

La variété A, d'équations $F = 0$, $G = 0$, a deux dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière C invariable.

De même la seconde identité (1) donne, dans E_4,

$$2\int\int_S \sum M_{ij} \, dx_i \, dx_j = \int\int\int_V \frac{\Delta_2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}} \tag{3}$$

en posant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

La variété V, d'équation $F = 0$, a trois dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière S, à deux dimensions, invariable.

Le mineur

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Nous rencontrerons d'autres développements de déterminants à effectuer de manière analogue; l'indice ω sera dit *indice de substitution.*

Dans le premier membre de (3), l'assemblage d'indices ij conduit à *six* termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34. On a toujours

$$M_{ii} = 0 .$$

En résumé, *nous partons des identités* (1) *ou bien*, ce qui n'est pas dire plus mais ce qui est plus explicite, *de deux formes différentielles*

$$\sum P_i dx_i , \qquad \sum M_{ij} dx_i dx_j \tag{4}$$

l'une linéaire, l'autre bilinéaire. C'est tout ce dont nous avons besoin, au point de vue des fondements essentiels, pour établir les formules générales de l'électromagnétisme et de la gravifique.

II. — Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant Δ_1; d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{Vmatrix} . \tag{5}$$

Soit l'égalité

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ {}_iP_{\alpha} & {}_jP_{\alpha} \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Le déterminant en ∂ est l'un des mineurs de (5) ; le dernier