Si l'on emploie l'inégalité connue de Schwarz

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt\ ,$$

où l'on suppose $b \geqq a$, on trouve que la valeur moyenne des fonctions $|\Delta(x)|$ et $|\mathrm{P}(x)|$ est au plus du même ordre que $\sqrt[4]{x}$.

6. — *La méthode de Landau.*

La méthode basée sur l'étude des fonctions de variables complexes s'appuie sur le lien qui existe entre le nombre des points entiers de certains domaines et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Nous n'avons à considérer ici que les séries de Dirichlet ordinaires, c'est-à-dire celles du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\ ,$$

les a_n étant des coefficients constants et s une variable complexe.

Si cette série converge en un point s_0, elle converge en chaque point s ayant une partie réelle plus grande. Pour le démontrer, posons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_k\ , \qquad \mathrm{F}_0 = 0\ ,$$

donc

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1} \qquad (n \geqq 1)\ .$$

Si v et w sont des nombres entiers ($w > v \geqq 1$), on a

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1}}{n^{s-s_0}} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n}{n^{s-s_0}} - \sum_{n=v-1}^{w-1} \frac{\mathrm{F}_n}{(n+1)^{s-s_0}}\ ,$$

donc

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w-1} \mathrm{F}_n\left(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right) + \frac{\mathrm{F}_w}{w^{s-s_0}} - \frac{\mathrm{F}_{v-1}}{v^{s-s_0}}\ . \qquad (8)$$

On a

$$\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} = (s - s_0)\int\limits_n^{n+1} \frac{du}{u^{s-s_0+1}} ,$$

donc

$$\left|\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right| \leqq |s - s_0| \cdot \int\limits_n^{n+1} \frac{du}{u^{p+1}} , \tag{9}$$

p désignant la valeur réelle de $s - s_0$. En vertu de la convergence de la série en question en s_0, le nombre F_n est borné, donc en valeur absolue plus petit qu'un nombre constant A; on a donc d'après (8) et (9)

$$\left|\sum_{n=\nu}^{w} \frac{a_n}{n^s}\right| < A\,|s - s_0| \cdot \int\limits_{\nu}^{w} \frac{du}{u^{p+1}} + \frac{A}{w^p} + \frac{A}{\nu^p} . \tag{10}$$

Comme p est positif (parce que la partie réelle de s est plus grande que celle de s_0), l'expression finale tend vers 0 pour ν croissant indéfiniment, de sorte que la série de Dirichlet en question converge au point s.

Il s'ensuit que pour une série de Dirichlet, on a trois cas possibles: convergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{n^s} ;$$

divergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s} ;$$

ou bien il y a une droite parallèle à l'axe imaginaire telle que la série diverge à sa gauche et converge à sa droite. L'abscisse de cette droite s'appelle l'abscisse de convergence de la série, et il y a une relation simple entre cette abscisse α et l'ordre de grandeur de la fonction

$$S(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} a_n ,$$

En effet, si $\alpha \geqq 0$, on a pour chaque nombre ε positif

$$S(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon}) ,$$

et inversément, si

$$S(x) = O(x^{\beta}) , \tag{11}$$

l'abscisse α de convergence est $\leqq \beta$. Pour démontrer la première de ces propriétés, nous appliquerons l'inégalité (10) en y posant $s = 0$, $\nu = 1$, $w = E(x)$, de sorte que le membre de gauche de cette inégalité est égale à la valeur absolue de $S(x)$. Nous devons poser $s_0 = \alpha + \varepsilon$, parce que la série converge en ce point ; alors $p = -(\alpha + \varepsilon)$, donc

$$|S(x)| < A.(\alpha+\varepsilon)\int_1^x u^{\alpha+\varepsilon-1}\,du + Ax^{\alpha+\varepsilon} + A = 2Ax^{\alpha+\varepsilon}.$$

Pour démontrer la seconde propriété, il suffit de montrer que la série de Dirichlet converge pour chaque nombre réel $s > \beta$, c'est-à-dire il suffit de montrer que pour chaque nombre $s = \beta + \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ le membre de gauche de la relation (8) tend vers 0, si ν croît indéfiniment. Posons $s_0 = 0$, donc $p = s - s_0 = \beta + \varepsilon$. Le nombre F_n est égal à $S(n)$ et d'après (11) il existe un nombre constant A tel que la valeur absolue de F_n est inférieure à An^{β} et à $A(n+1)^{\beta}$, donc inférieure à u^{β}, u désignant un nombre quelconque dans l'intervalle $n \leqq u \leqq n+1$.

Il s'ensuit

$$|F_n|.\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{p+1}} < A\int_n^{n+1} u^{\beta}.\frac{du}{u^{\beta+\varepsilon+1}} = A\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{\varepsilon+1}}.$$

D'après (8) et (9) on a

$$\left|\sum_{n=\nu}^{w}\frac{a_n}{n^s}\right| < A.|\beta+\varepsilon|.\int_\nu^w\frac{du}{u^{\varepsilon+1}} + \frac{A}{w^{\varepsilon}} + \frac{A}{\nu^{\varepsilon}},$$

et l'expression finale tend en effet pour chaque nombre positif ε vers 0, si ν croît indéfiniment.

De ces considérations on déduit un lien entre nos problèmes et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Comme exemple nous prendrons le problème du cercle. Le nombre des points entiers du cercle $u^2 + v^2 = x$ est égal à la somme

$$\sum_{0 \leqq n \leqq x} r(n) ,$$

$r(n)$ désignant le nombre des solutions entières de l'équation $u^2 + v^2 = n$. D'après le résultat de M. Sierpiński la fonction πx représente cette somme avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de $\sqrt[3]{x}$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) ,$$

de sorte que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n) - \pi}{n^s}$$

a une abscisse de convergence $\leqq \frac{1}{3}$. Si nous pouvons démontrer directement ce théorème, nous aurons montré que pour chaque nombre ε positif nous avons la relation

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) ,$$

donc

$$P(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} r(n) - \pi x = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) .$$

M. Landau [1] a publié en 1912 une méthode au moyen de laquelle on peut trouver une démonstration directe dans ce cas et dans bien d'autres. Cette méthode est applicable pour des domaines à k dimensions pour lesquels la série correspondante de Dirichlet satisfait entre autres à une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Il applique cette

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 687-771; (1915), p. 209-243; (1917), p. 96-101.

méthode entre autres [1] aux problèmes concernant l'ellipsoïde à k dimensions [2].

La méthode de Landau se sert, il est vrai, de propositions exigeant des connaissances mathématiques assez profondes, mais elle conduit parfois très rapidement au but. Par exemple M. Landau [3] n'a besoin que de 2 pages pour démontrer la proposition de Sierpiński

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}\left(\sqrt[3]{x}\right),$$

tandis que M. Sierpiński [4] a besoin d'environ 40 pages pour la démonstration du même théorème par la méthode de Voronoï.

Un des grands avantages de l'emploi des variables complexes est qu'il conduit non seulement à des résultats contenant le symbole O, mais encore à des résultats contenant Ω.

MM. Landau [5], Hardy [6], Wigert [7] et Cramér [8] ont appliqué la théorie des nombres complexes au problème des diviseurs et à celui du cercle. M. Hardy a montré:

$$\mathrm{P}(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x} \log \log x\right);$$

si α_k désigne la limite inférieure de l'exposant β^k pour lequel la relation

$$\Delta_k(x) = \mathrm{O}\left(x^{\beta_k}\right)$$

est encore juste, on a

$$\frac{1}{4} \leqq \alpha_2 \leqq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leqq \alpha_3 \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{k-1}{2k} \leqq \alpha_k \leqq \frac{k-2}{k} \qquad (k \geqq 4).$$

En admettant l'hypothèse de Riemann que toutes les racines

---

[1] *Gött. Nachr.* (1917), p. 102-111; *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (1918), p. 131; *Math. Zs.*, 2 (1918), p. 52-154.

[2] *Berl. Ber.* (1915), p. 458-476; *Wien. Ber.* (IIa), 124 (1915), p. 445-468.

[3] *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

[5] *Batt. G.*, 51 (1913), p. 73-81; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328; *Gött. Nachr.* (1915), p. 161-171; *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[6] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283; *Lond. M. S. Proc.* (2), 15 (1916), p. 1-25 et p. 192-213; 18 (1919), p. 201-204.

[7] *Acta Math.*, 37 (1914), p. 113-140. Cf. Landau, *Gött. gelehrte Anzeigen*, 177 (195), p. 377-414.

[8] *Ark. för Mat., Astron. och Fys.*, 21 (1922).

complexes de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite d'abscisse $\frac{1}{2}$, M. Landau[1] a déduit d'une proposition due à M. Littlewood[2] qu'aucun des nombres α_2, α_3, ... etc. ne surpasse $\frac{1}{2}$.

7. — *La méthode de Van der Corput*[3] *et de Vinogradoff*[4].

Finalement nous traiterons une méthode que M. Vinogradoff et moi avons trouvée indépendamment l'un de l'autre. Plus d'un mois après avoir tenu cette conférence, j'ai pour la première fois appris le nom de M. Vinogradoff et les remarques faites dans cet article au sujet des résultats trouvés par lui ont été ajoutées au texte lors de la correction de la première épreuve.

Avant de passer à la méthode, je veux indiquer comment j'y suis arrivé peu à peu par l'étude des méthodes de Voronoï, de Pfeiffer et de Piltz.

Comme nous l'avons déjà dit à propos des méthodes de Dirichlet et de Piltz, nous n'avons dans le problème des diviseurs à nous occuper que de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

De même dans le problème du cercle nous n'avons à considérer que la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{\frac{1}{2} x} \\ h \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x - h^2}) .$$

---

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 728.

[2] *C. R.*, 154 (1912), p. 263-266.

[3] Thèse de doctorat (1919), Leiden; *Math. Ann.*, 81 (1920), p. 1-20; *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 105-120; *Math. Ann.*, 84 (1921), p. 53-79; 87 (1922), p. 39-65. Un autre article paraîtra bientôt dans les *Math. Ann.* et un autre encore dans la *Math. Zs.* Cf. LANDAU-Van der CORPUT, *Gött. Nachr.* (1920), p. 135-171.

[4] *Journal de la Soc. math. Charkov* (1917); *Bull. de l'Ac. des Sciences de Russie*, Pétrograd (1917), p. 1347-1378; Thèse de doctorat (1920), Pétrograd. Les articles de M. Vinogradoff ont été écrits dans la langue russe.