

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1923)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE  
DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES  
**Autor:** van der Corput, J. G.  
**Kapitel:** 7. — La méthode de Van der Corput et de Vinogradoff.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19730>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

complexes de la fonction  $\zeta(s)$  se trouvent sur la droite d'abscisse  $\frac{1}{2}$ , M. Landau<sup>1</sup> a déduit d'une proposition due à M. Littlewood<sup>2</sup> qu'aucun des nombres  $\alpha_2, \alpha_3, \dots$  etc. ne dépasse  $\frac{1}{2}$ .

### 7. — La méthode de Van der Corput<sup>3</sup> et de Vinogradoff<sup>4</sup>.

Finalement nous traiterons une méthode que M. Vinogradoff et moi avons trouvée indépendamment l'un de l'autre. Plus d'un mois après avoir tenu cette conférence, j'ai pour la première fois appris le nom de M. Vinogradoff et les remarques faites dans cet article au sujet des résultats trouvés par lui ont été ajoutées au texte lors de la correction de la première épreuve.

Avant de passer à la méthode, je veux indiquer comment j'y suis arrivé peu à peu par l'étude des méthodes de Voronoï, de Pfeiffer et de Piltz.

Comme nous l'avons déjà dit à propos des méthodes de Dirichlet et de Piltz, nous n'avons dans le problème des diviseurs à nous occuper que de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right).$$

De même dans le problème du cercle nous n'avons à considérer que la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ h \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x - h^2}).$$

<sup>1</sup> *Gött. Nachr.* (1912), p. 728.

<sup>2</sup> *C. R.*, 154 (1912), p. 263-266.

<sup>3</sup> Thèse de doctorat (1919), Leiden; *Math. Ann.*, 81 (1920), p. 1-20; *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 105-120; *Math. Ann.*, 84 (1921), p. 53-79; 87 (1922), p. 39-65. Un autre article paraîtra bientôt dans les *Math. Ann.* et un autre encore dans la *Math. Zs.* Cf. LANDAU-VAN DER CORPUT, *Gött. Nachr.* (1920), p. 135-171.

<sup>4</sup> *Journal de la Soc. math. Charkov* (1917); *Bull. de l'Ac. des Sciences de Russie*, Pétersbourg (1917), p. 1347-1378; Thèse de doctorat (1920), Pétersbourg. Les articles de M. Vinogradoff ont été écrits dans la langue russe.

Pour calculer le nombre des points entiers d'un domaine quelconque, il suffit de calculer la somme

$$\sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) .$$

$\varphi = f(u)$  ou  $u = f(\varphi)$  étant l'équation d'une partie du contour. Jusqu'à ces dernières années la méthode de Pfeiffer était appliquée à peu de problèmes seulement, et la méthode de Voronoï à deux seuls problèmes, celui des diviseurs et celui du cercle, de sorte que dans l'emploi de cette dernière méthode on posait toujours  $f(u) = \frac{x}{u}$  ou  $f(u) = \sqrt{x - u^2}$ . J'ai montré que ces deux méthodes pouvaient être appliquées à chaque fonction  $f(u)$  remplissant la condition suivante :

$C'$   $\left\{ \begin{array}{l} f(u) \text{ est réelle et deux fois dérivable dans l'intervalle} \\ a \leq u \leq b, (a + 1 \leq b), \text{ la deuxième dérivée étant uni-} \\ \text{oscillante (c'est-à-dire monotone), toujours positive ou} \\ \text{toujours négative.} \end{array} \right.$

Les deux méthodes donnent dans ce cas le même résultat, à savoir qu'il y a une constante absolue  $c$  telle que l'on ait

$$\left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \right| < c \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right) . \quad (12)$$

Il est évident que l'on peut maintenant calculer approximativement le nombre des points entiers dans des domaines satisfaisant à des relations très générales. Nous prendrons comme exemple le problème des diviseurs, c'est-à-dire nous approximerons la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Nous décomposons cette somme en deux sommes partielles

$$\sum_{\substack{1 \leq h < \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{\sqrt{x} \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Puisque  $|\psi| \leq \frac{1}{2}$ , la valeur absolue de la première somme partielle est  $< \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$ . Pour un  $x$  suffisamment grand  $\sqrt[3]{x} + 1 \leq \sqrt{x}$ , de sorte que la relation C' est remplie pour  $a = \sqrt[3]{x}$ ,  $b = \sqrt{x}$ ,  $f(u) = \frac{x}{u}$ . La valeur absolue de la deuxième somme partielle est donc plus petite que

$$c \left( \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} \left( \frac{2x}{u^3} \right)^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x}}} \right) \\ = c \left( \frac{1}{6} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{x} \log x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

de sorte que l'erreur dans le problème de diviseurs ne surpasse pas, en effet, l'ordre de la fonction  $\sqrt[3]{x} \log x$ .

La méthode de Piltz ne donne pas seulement la proposition énoncée, mais encore un résultat plus général. De la méthode de Piltz il suit que l'inégalité (12) est valable non seulement pour la fonction  $\psi(\nu) = \nu - E(\nu) - \frac{1}{2}$ , mais encore pour chaque fonction  $\psi(\nu)$  remplissant la condition suivante:

$$\text{B} \left\{ \begin{array}{l} \psi(\nu) \text{ est réelle et périodique de période } 1, \text{ unioscillante} \\ \text{dans l'intervalle } 0 < \nu < 1, \text{ et satisfait à} \\ \\ |\psi(\nu)| \leq 1 \quad (0 \leq \nu \leq 1), \quad \int_0^1 \psi(\nu) d\nu = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on part de cette supposition, il est très facile de saisir le principe de la nouvelle méthode. De la supposition B il découle que  $\psi(\nu)$  est développable dans la série de Fourier suivante

$$\psi(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i \nu}, \quad \text{où } a_0 = 0,$$

donc

$$\sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) = \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i f(n)},$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \cdot \left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} e^{2m\pi i f(n)} \right|, \quad (13)$$

étant admis la convergence de la dernière double sommation. Si  $f(u)$  satisfait à la condition  $C'$ ,  $mf(u)$  y satisfait également. Si donc de la condition  $C'$  une borne supérieure peut être déduite pour la valeur absolue de la sommation

$$\sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} e^{2\pi i f(n)}, \quad (14)$$

on trouve également une borne supérieure pour tous les termes de la sommation dans le membre de droite de (13), de sorte que l'on obtient ainsi une borne supérieure pour le membre de gauche de cette inégalité.

Le problème essentiel réside donc dans la possibilité d'approximer aussi près que possible la somme (14), et c'est grâce à une équation fonctionnelle approximative remarquable que la chose est possible. Puisque  $f''(u)$  dans l'intervalle  $a \leq u \leq b$  est supposé constamment positif ou constamment négatif,  $f'(u)$  est une fonction uniosillante de  $u$ . Si  $A$  désigne le plus petit et  $B$  le plus grand des nombres  $f'(a)$  et  $f'(b)$ , à chaque  $\nu$  dans l'intervalle  $A \leq \nu \leq B$  correspond un nombre  $n_\nu$  univoquement déterminé par les relations  $f'(n_\nu) = \nu$ , et  $a \leq n_\nu \leq b$ . L'équation fonctionnelle approximative établit que la somme cherchée (14) est donnée avec une très grande approximation par l'expression

$$e^{\pm \frac{\pi i}{4}} \sum_{\substack{A \leq \nu \leq B \\ \nu \text{ entier}}} \frac{e^{2\pi i(f(n_\nu) - \nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}, \quad (15)$$

où l'on doit prendre le signe  $+$  ou le signe  $-$ , selon que  $f''(u)$  dans l'intervalle  $a \leq u \leq b$  est constamment positif ou constamment négatif.

Pour approximer la somme (14), il suffit donc de calculer cette dernière expression.

Si nous employons pour la valeur absolue de cette dernière somme la borne supérieure triviale

$$\sum_{\substack{A \leq v \leq B \\ v \text{ entier}}} \frac{1}{\sqrt{|f''(n_v)|}} \quad (16)$$

nous obtenons à peu près la même approximation pour la somme (14), et si nous substituons ce résultat, nous trouvons précisément l'inégalité (12), de sorte que cette méthode fournit le même résultat que la méthode de Piltz. Mais elle peut fournir encore un meilleur résultat. Nous avons employé pour la sommation (15) l'approximation triviale (16). Il se pose maintenant la question suivante: est-il possible de remplacer cette approximation triviale par une meilleure? A cette question il a été répondu affirmativement, tant par M. Vinogradoff que par moi. Je suppose que M. Vinogradoff a développé une propre méthode, tandis que moi j'ai appliqué la méthode de Weyl<sup>1</sup>, entre autres dans le cas où  $f(u)$  satisfait non seulement à la condition C', mais encore à la condition suivante:

D

$$\left. \begin{array}{l} f(u) \text{ est dans l'intervalle } a \leq u \leq b \text{ } k + 1 \text{ fois dérivable} \\ (k \geq 2); \text{ on a} \\ |f'''(u)| \leq |f''(u)|^{\frac{4}{3} + \eta} \quad (17) \\ (\eta > 0), \text{ et dans l'intervalle } a \leq u \leq b \text{ chaque produit} \\ f^{(h_1+2)}(u) \cdot f^{(h_2+2)}(u) \dots f^{(h_{k-1}+2)}(u) \quad (18) \\ \text{où les } h_1, h_2, \dots, h_{k-1} \text{ désignent des nombres non-} \\ \text{négatifs dont la somme égale } k - 1, \text{ est en valeur ab-} \\ \text{solue au plus égal à } |f''(u)|^{\frac{5}{3} k - 1 + \eta} \end{array} \right\}$$

Les conditions C' et D étant remplies, on peut trouver pour la somme (15), donc aussi pour la somme (14) une meilleure approximation. Dans ce cas on peut remplacer la proposition énoncée

<sup>1</sup> WEYL. *Gött. Nachr.* (1914), p. 234-244; *Math. Ann.*, 77 (1916), p. 313-352 et *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 88-101.

par la proposition suivante: Les conditions B, C' et D étant vérifiées, il existe un nombre  $\gamma$  dépendant au plus de  $k$  et un nombre positif  $\omega$  dépendant au plus de  $k$  et de  $\eta$  avec la propriété

$$\left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \right| < \gamma \left( \int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3} + \omega} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right) \quad (19)$$

L'exposant  $\frac{1}{3}$  est donc remplacé par un nombre plus grand.

Avec cette inégalité on peut améliorer tous les résultats en question obtenus jusqu'ici contenant le symbole O de Landau.

On trouve par exemple qu'il existe une constante  $\Theta < \frac{1}{3}$  telle que dans le problème des diviseurs l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de  $x^\Theta$ ; j'ai montré qu'on peut prendre même

$\Theta < \frac{33}{100}$ . Donc dans le problème des diviseurs l'exposant du terme représentant l'ordre de l'erreur est compris entre  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{33}{100}$ ; donc  $\frac{1}{4} \leq a_2 < \frac{33}{100}$ .

Comme exemple je prouverai que dans le problème du cercle l'exposant analogue est inférieur à  $\frac{1}{3}$ . Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il suffit de démontrer

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x - n^2}) = O(x^\Theta),$$

$\Theta$  désignant une constante  $< \frac{1}{3}$ . Nous appliquerons notre proposition, en posant  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ ,  $f(u) = \sqrt{x - u^2}$ . Nous devons supposer  $x > 8$ , donc  $a + 1 \leq b$ ; de cette manière la condition C' est remplie. En choisissant  $x$  assez grand, la condition D est remplie pour  $k = 4$ ,  $\eta = \frac{1}{6}$ . En effet, dans l'intervalle  $1 \leq u \leq \sqrt{\frac{1}{2}x}$ , l'ordre de  $f''(u)$ ,  $f'''(u)$ ,  $f^{IV}(u)$ ,  $f^V(u)$  est

égal respectivement à celui de  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ . Dans (17) l'ordre du premier membre est donc  $\frac{1}{x}$  et celui du second membre

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}},$$

de sorte que,  $x$  étant choisi suffisamment grand, le premier membre est plus petit que le second. L'ordre du produit (18) est

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}(h_1+1)+\frac{1}{2}(h_2+1)+\frac{1}{2}(h_3+1)}} = \frac{1}{x^3}$$

à cause de  $h_1 + h_2 + h_3 = 3$ , de sorte que,  $x$  étant choisi suffisamment grand, la valeur absolue de ce produit est plus petite que  $|f''(u)|^{\frac{5}{4} \cdot 4 - 1 + \frac{1}{6}}$ , dont l'ordre est égal à

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{35}{6}}} = \frac{1}{x^{\frac{35}{12}}}.$$

Les conditions sont ainsi remplies; l'inégalité (19) a donc lieu, et il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-n^2}) &= O \left\{ \int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}x}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{3}+\omega} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} \right\} \\ &= O \left( x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\omega\right)} + x^{\frac{1}{4}} \right) = O \left( x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\omega} + x^{\frac{1}{4}} \right). \end{aligned}$$

Dans le problème du cercle l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de  $x^\Theta$ ,  $\Theta$  désignant le plus grand des deux nombres  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\omega$  et  $\frac{1}{4}$  (donc  $\Theta < \frac{1}{3}$ ).

Nous sommes arrivés au terme de notre exposé. Le choix entre les différentes méthodes dont nous venons de parler dépend dans chaque cas particulier du problème posé et du degré



d'exactitude demandé. Si une première approximation est suffisante, on peut se contenter de la méthode de Gauss ou de celle de Dirichlet. Pour les approximations contenant  $\Omega$  et aussi dans les problèmes concernant des domaines à  $k$  dimensions, l'emploi des variables complexes est préférable; jusqu'ici en effet dans les questions de cette nature la méthode de Pfeiffer n'est appliquée qu'à des cas particuliers, et les autres pas du tout. La méthode de Van der Corput et de Vinogradoff n'est encore qu'à son stade initial et elle sera en tout cas encore applicable à beaucoup d'autres problèmes. Je suis persuadé qu'elle est encore susceptible d'amélioration. J'ai en effet l'impression que la méthode de Weyl, appliquée à la somme (15), ne donne pas la dernière approximation possible, qu'au contraire, la valeur absolue de (15) est beaucoup plus petite que la borne trouvée avec la méthode de Weyl. Et chaque amélioration de l'approximation de cette somme donne une amélioration du résultat final.

D'après une communication qu'il a faite par écrit, M. Vinogradoff a démontré que dans le problème des diviseurs la limite inférieure de l'exposant dans le terme de l'erreur est  $\leq \frac{5}{16}$  et il n'est pas impossible que sous peu il sera démontré que cette limite inférieure est égale à  $\frac{1}{4}$ .

---

•