Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES sin x ET cos x

Autor: Arnovljevic, J. / Petronievics, B.

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19746

La première partie de cet article contient la part de la collaboration importante de M. Arnovljevic; dans la deuxième, je donne d'abord ma solution du problème résolu par M. Arnovljévic, puis la solution générale.

I

Nous allons donner d'abord la déduction géométrique des formules connues

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = \cos x \ .$$

Dans le cercle de rayon $\overline{OA_0} = 1$ (fig. 1), on a

$$\overline{OA} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{AB} = \sin x \ ,$$

$$\overline{BB_1} = dx \ , \qquad \overline{C_1 B_1} = d \sin x \ , \qquad \overline{BC_1} = - d \cos x \ ,$$

De $\Delta B_1 BC_1 \sim OBA$, on déduit

$$\overline{B_1 C_1} : \overline{B_1 B} = \overline{OA} : \overline{OB} \qquad \text{et} \qquad \overline{BC_1} : \overline{BB_1} = \overline{AB} : \overline{OB} \ .$$

d'où:

$$d \sin x : dx = \cos x : 1 \qquad \text{et} \qquad - d \cos x : dx = \sin x : 1 \ .$$

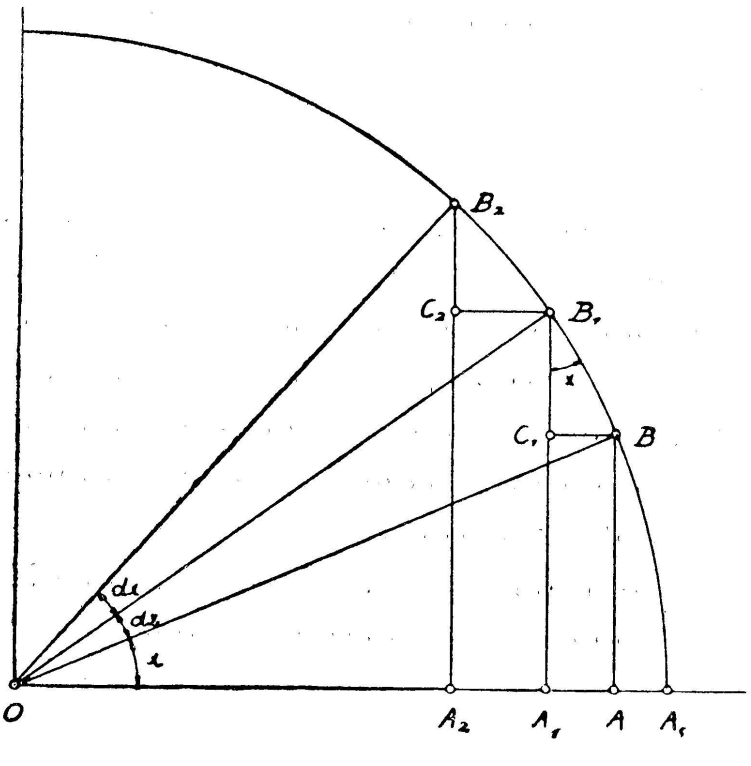

Fig. 1

C'est la déduction géométrique de

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \text{et} \quad \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \, .$$

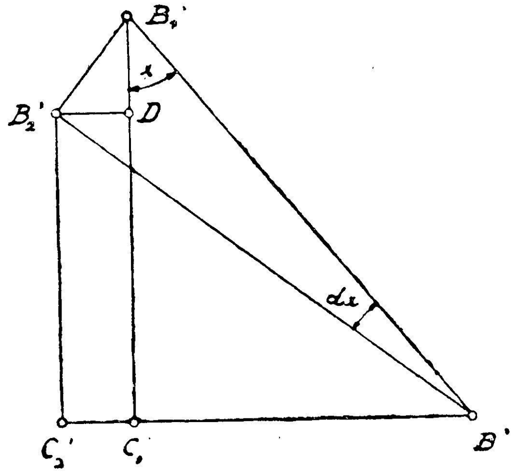

Fig. 2

Dans la fig. 2, les deux triangles BB_1C_1 et $B_1B_2C_2$ de la fig. 1 ont été agrandis et tracés de telle sorte que les deux angles B et B_1 coïncident en B' et que les côtés BC_1 (resp. $B'C_1'$) et B_1C_2 (resp. $B'C_2'$) coïncident aussi.

Alors $B'B_1'$ étant // BB_1 et $B'B_2'$ // B_1B_2, on a: $\sphericalangle B_1'B'B_2' = dx$; $B_1'B_2'$ étant // OB_1 et $B_2'D \perp B_1'C_1'$, on a: $\sphericalangle B_1'B_2'D = x + dx = x$; et dans le triangle $B_2'DB_1'$ on a: $DB_2' = \overline{C_2'B'} - \overline{C_1'B'} = - d^2 \cos x$, $\overline{DB_1'} = \overline{B_2'C_2'} - \overline{B_1'C_1'} = - d^2 \sin x$ et $B_1'B_2' = \overline{B'B_1'} \,.\, dx = (dx)^2$.

De $\Delta B_2'DB_1$, de la fig. 2 (dont les côtés sont des grandeurs infiniment petites de deuxième ordre), $\sim$ OAB (dans la fig. 1), leurs côtés respectifs devenant parallèles à la limite, on a:

$$\overline{B_1'D} : \overline{B_1'B_2'} = \overline{BA} : \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{B_2'D} : \overline{B_1'B_2'} = \overline{OA} : \overline{OB}$$

d'où:

$$- d^2 \sin x : dx^2 = \sin x : 1 \quad \text{et} \quad - d^2 \cos x : dx^2 = \cos x : 1 \, ,$$

ou:

$$\frac{d^2 \sin . x}{dx^2} = - \sin x \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cos . x}{dx^2} = - \cos x \, .$$