Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

Autor: Delens, P.-C.

Kapitel: Chapitre III. ' ' M ',

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19731

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2}(ab = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\left((ab)(j_2^2)j_1^2 + (ab)(j_1^1)j_2^2\right)$$

donc:

$$\mathcal{O}_2^{(3}(ab = \mathcal{O}_2(ab$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération $\mathcal{O}_2$.

Chapitre III.

Extension du produit cyclique au cas de n *vecteurs.*

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs $a, b, c..l$ l'expression :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = a \smile b \smile c \ldots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\left((f^{(n)})(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n\right) \qquad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \ldots l \, .$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n, mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \qquad (p = 1, 2 \ldots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \ldots \cdot j_1 j_2^{n-1} \qquad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de $j_1^{\underset{\smile}{n}}$, par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.

Comme pour le produit cyclique de deux vecteurs, on peut toujours résoudre l'équation binôme :

$$x^{\underset{\smile}{n}} = f^{\underset{\smile}{(n)}} \tag{4}$$

soit en la ramenant à l'équivalence :

$$x^n = f^{(n)} + \lambda_1 j_1^{n-1} j_2 \cdots + \lambda_{n-1} j_1 j_2^{n-1}$$

que nous écrirons de manière abrégée :

$$x^n = f^{(n)} \qquad (\text{module } j_1 j_2) \tag{5}$$

puis déterminant les coefficients λ par la condition que le premier membre soit une puissance n^{me} parfaite ; soit encore en la remplaçant par le système d'équations simultanées :

$$\left\{\begin{aligned} x^n \,)(\, j_1^n &= f^{(n)} \,)(\, j_1^n \\ x^n \,)(\, j_2^n &= f^{(n)} \,)(\, j_2^n \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Il résulte des considérations précédentes que les formes :

$$f^{(n)} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)} + \lambda j_1 j_2 g^{(n-2)}$$

sont équivalentes pour le produit cyclique, quelle que soit la forme $g^{(n-2)}$ et aussi que les n solutions de l'équation binôme forment le faisceau régulier de n vecteurs que représente l'orientante $f^{\underset{\smile}{(n)}}$, faisceau apolaire au couple isotrope $j_1 j_2$.

On voit encore que les seuls produits cycliques qui sont nuls sans qu'un de leurs facteurs du premier ordre s'annule sont ceux qui admettent comme facteur (du second ordre) $j_1 \smile j_2$. C'est Laguerre qui a introduit la notion d'*orientation* (relative à un axe de repère u) d'un faisceau de directions; G. Humbert a désigné sous ce nom, pour la forme $abc \ldots l$ le coefficient :

$$(-1)^n \frac{abc \ldots l \,)(\, j_1^n}{abc \ldots l \,)(\, j_2^n} = (-1)^n \frac{\zeta_a \zeta_b \cdots \zeta_l}{\bar{\zeta}_a \bar{\zeta}_b \cdots \bar{\zeta}_l}$$

en coordonnées symétriques :

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + \iota\eta \\ \bar{\zeta} &= \xi - \iota\eta \,. \end{aligned}$$

Nous pouvons sans inconvénient modifier la définition de Humbert en négligeant le facteur $(-1)^n$, de sorte que l'orientation sera définie par :

$$\omega = \frac{f^{(n)})(j_1^n}{f^{(n)})(j_2^n} \tag{7}$$

qui est le coefficient essentiel d'une orientante, d'équation :

$$(j_1^n - \omega j_2^n)(x^n = 0 .$$

Les propriétés des orientations résulteront donc immédiatement de celles des orientantes, c'est-à-dire du produit cyclique. Il est évident que celui-ci est commutatif, mais il nous reste à montrer ce qu'on pourra considérer comme la *propriété associative* du produit, bien que cette propriété soit toute autre que celle qu'on considère dans les systèmes *numériques* complexes; le même cas se présente déjà, du reste, pour le produit extérieur de Grassmann.

Nous allons établir que si une forme $f^{(n)}$ est le produit algébrique de formes d'ordre moindre, telles que $g^{(p)}$, l'orientante $\underline{f^{(n)}}$ est un produit des orientantes $\underline{g^{(p)}}$, et pour le produit ainsi défini nous conserverons le signe $\smile$ du produit cyclique.

Nous remarquerons d'abord que si deux formes orientantes :

$$a^{(p)} = \alpha_1 j_1^p - \alpha_2 j_2^p$$

$$a'^{(p)} = \alpha_1 j_1^p + \alpha_2 j_2^p$$

diffèrent par le signe du coefficient de j_2^p, c'est-à-dire ont des orientations opposées, la seconde est fonction linéaire de la première — et inversement — le symbole de cette fonction ne dépendant pas de la forme considérée.

En effet :

$$a^{(p)})(j_2^p = \alpha_1 [j_1 j_2]^p$$

$$a^{(p)})(j_1^p = - \alpha_2 [j_2 j_1]^p$$

donc :

$$a'^{(p)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^p} \left((a^{(p)})(j_2^p) j_1^p - (-1)^p (a^{(p)})(j_1^p) j_2^p\right) = \mathfrak{A}_p (a^{(p)} . \tag{8}$$

Supposons maintenant :

$$f^{(n)} = g^{(p)} h^{(q)} \qquad (p + q = n)$$

$$[j_1 j_2]^n f^{\underset{\smile}{(n)}} = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

$$[j_1 j_2]^p g^{\underset{\smile}{(p)}} = \gamma_1 j_1^p - \gamma_2 j_2^p$$

$$[j_1 j_2]^q h^{\underset{\smile}{(q)}} = \eta_1 j_1^q - \eta_2 j_2^q$$

avec :

$$\varphi_1 = f^{(n)})(j_2^n = \left(g^{(p)})(j_2^p\right)\left(h^{(q)})(j_2^q\right) = \gamma_1 \eta_1$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 \eta_2$$

donc :

$$[j_1 j_2]^n f^{\underset{\smile}{(n)}} = \gamma_1 j_1^p \eta_1 j_1^q - \gamma_2 j_2^p \eta_2 j_2^q .$$

Le second membre est de la forme :

$$A_1 B_1 - A_2 B_2 = \frac{1}{2}\left[(A_1 - A_2)(B_1 + B_2) + (B_1 - B_2)(A_1 + A_2)\right]$$

donc :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \frac{1}{2}\left(g^{\underset{\smile}{(p)}} \mathcal{A}_q(h^{\underset{\smile}{(q)}} + h^{\underset{\smile}{(q)}} \mathcal{A}_p(g^{\underset{\smile}{(p)}}\right) = g^{\underset{\smile}{(p)}} \smile h^{\underset{\smile}{(q)}} \qquad (9)$$

et comme on a vu en même temps :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

l'orientation de $f^{(n)}$ est aussi le produit des orientations de $g^{(p)}$ et $h^{(q)}$.

Remarque. — L'opération linéaire $\mathcal{A}_p$ précédemment employée *sur une orientante* est reliée simplement à l'opération $\mathcal{O}_p$ qui donne l'orientante d'une forme d'ordre p. On a, en effet, quelle que soit la parité de p :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p^{(2}$$

mais si p est pair, on a plus simplement :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p .$$