Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

Autor: Delens, P.-C.

Kapitel: Chapitre V. Nouveaux développements sur les similitudes. Anti-similitudes et affinités.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19731

qui, agissant sur un produit de $n+1$ facteurs, redonnent un vecteur, soit:

$$)\frac{1}{a \smile b \ldots \smile l}(a' \smile b' \ldots \smile l' \smile m' = m \; .$$

Nous verrons un peu plus tard comment on peut transformer ces opérateurs.

Remarque. Nous avons, chemin faisant, remarqué que l'opération $\mathcal{J}$, appliquée à une orientante:

$$\varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

la transformait en:

$$-\iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n) \; .$$

Ceci donne un sens plus précis aux opérations $\mathcal{A}_n$ précédemment employées:

$$\mathcal{A}_n = \iota\mathcal{J} \tag{12}$$

et montre que l'opération $\mathcal{A}_n$ est indépendante de son indice n.

En outre, la formule fondamentale (9) ch. III, devient:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \frac{\iota}{2}\left(g^{\underset{\smile}{(p)}}\mathcal{J}h^{\underset{\smile}{(q)}} + h^{\underset{\smile}{(q)}}\mathcal{J}g^{\underset{\smile}{(p)}}\right) = g^{\underset{\smile}{(p)}} \smile h^{\underset{\smile}{(q)}} \; . \tag{13}$$

Chapitre V

Nouveaux développements sur les similitudes. Anti-similitudes et affinités.

On sait qu'à une similitude:

$$\mathcal{H} = \lambda\mathcal{U} + \mu\mathcal{J}$$

on peut adjoindre la similitude conjuguée :

$$\mathbf{K}\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} = \lambda\mathcal{U} - \mu\mathcal{J}$$

qui a même équation fondamentale que $\mathcal{H}$, comme cela résulte de l'égalité des invariants :

$$\begin{cases} [\mathcal{U}\overline{\mathcal{H}}] = [\mathcal{U}\mathcal{H}] = \lambda \\ \overline{\mathcal{H}}^{\text{II}} = \mathcal{H}^{\text{II}} = \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(norme de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

invariants qui sont aussi donnés par:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}}) = \lambda \\ \mathcal{H}(\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H} = \lambda^2 + \mu^2 \end{array}\right.$$

si on accepte de représenter par 1 l'opération identique.

Supposons maintenant:

$$\mathcal{H} =)\frac{b}{a} \qquad \overline{\mathcal{H}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}}\,)\frac{a}{b}$$

donc :

$$\mathcal{H}^{\mathrm{II}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} \,. \tag{1}$$

Puis, comme :

$$b = \mathcal{H}a = \lambda a + \mu \mathcal{I} a$$

$$a \times b = \lambda a^{\overset{2}{\times}} \,.$$

On trouve d'autre part:

$$\lambda = [\mathfrak{U}\mathcal{H}] =)\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}}\,)\frac{a}{b} =)\frac{a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\times}}\, a \smile b} = \frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}} \tag{2}$$

ce qui donne la relation identique entre les trois orientantes $a^{\overset{2}{\smile}}$, $a \smile b$, $b^{\overset{2}{\smile}}$:

$$a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} - 2(a \times b)\, a \smile b + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}} = 0 \tag{3}$$

qui n'est qu'une autre forme de la relation fondamentale à laquelle satisfait $\mathcal{H}$:

$$)\frac{b^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\smile}}} - 2\,\frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}}\,)\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} = 0 \,. \tag{4}$$

A côté des similitudes, qui transforment une figure en une autre directement semblable, nous allons étudier les *anti-similitudes* (comprenant les anti-rotations), transformant une figure en une autre inversement semblable.

Il est pour cela commode d'introduire la notion de vecteur *inverse* d'un vecteur donné, que nous définirons et représenterons ici par:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^{\overset{2}{\times}}}$$

et inversement:

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{\overset{2}{\times}}} .$$

La similitude conjuguée de:

$$\mathcal{H} =)\frac{b}{a}$$

sera alors:

$$\bar{\mathcal{H}} =)\frac{\bar{a}}{\bar{b}} .$$

Supposons maintenant que des vecteurs a, x soient transformés par une anti-similitude $\mathcal{T}$ en vecteurs b, y. On doit avoir:

$$)\frac{y}{b} = \mathbf{K}\,)\frac{x}{a} =)\frac{\bar{a}}{\bar{x}}$$

donc:

$$y = \mathcal{T}x =)\frac{b \smile \bar{a}}{\bar{x}}$$

et le numérateur pourrait du reste s'abréger en $e^{\overset{2}{\smile}}$. Il serait facile de montrer que la séquence de deux anti-similitudes est une similitude, comme de calculer les invariants de ces opérateurs. Mais nous n'avons là que des cas particuliers des homographies vectorielles du plan, ou affinités.

Nous allons montrer que, réciproquement, toute affinité plane peut-être décomposée en la somme d'une similitude et d'une anti-similitude. Nous rappelons à ce sujet qu'une homographie vectorielle, mise sous forme d'un rapport extensif, peut être transformée en une forme dyadique, c'est-à-dire en une somme de dyades.

Soit:

$$\mathfrak{A} = \left\{ b\,,\ \bar{a} \right\} \tag{5}$$

une telle dyade qui, par définition, transforme un vecteur x de la manière suivante:

$$y = \mathcal{A}x = \left\{ b \, , \; \bar{a} \right\} | x = (\bar{a} \times x) b \, .$$

Il nous suffira évidemment de faire la démonstration indiquée sur la dyade $\mathcal{A}$. Or on peut écrire:

$$2\mathcal{A} = \left\{ b \, , \; \bar{a} + \mathcal{J}b \, , \; \mathcal{J}\bar{a} \right\} + \left\{ b \, , \; \bar{a} - \mathcal{J}b \, , \; \mathcal{J}\bar{a} \right\} . \qquad (6)$$

Le premier opérateur

$$\left\{ b \, , \; \bar{a} + \mathcal{J}b \, , \; \mathcal{J}\bar{a} \right\}$$

transforme les vecteurs a et $\mathcal{J}a$ respectivement en b et $\mathcal{J}b$. C'est donc une similitude:

$$\mathcal{H} = \left\{ b \, , \; \bar{a} + \mathcal{J}b \, , \; \mathcal{J}\bar{a} \right\} = \frac{b \, , \; \mathcal{J}b}{a \, , \; \mathcal{J}a} =)\frac{b}{a} \, .$$

Le second opérateur

$$\left\{ b \, , \; \bar{a} - \mathcal{J}b \, , \; \mathcal{J}\bar{a} \right\}$$

transforme a et $\mathcal{J}a$ en b et $-\mathcal{J}b$; c'est donc bien l'anti-similitude $\mathcal{L}$ précédemment définie, donc:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \mathcal{L})$$

décomposition aussi remarquable pour les propriétés métriques que la décomposition en parties symétrique et gauche pour les propriétés affines.

On définirait aussi simplement des opérateurs non-linéaires réalisant l'inversion et la sym-inversion (inversion symétrique), qui, par leurs séquences, reproduisent les similitudes directes et inverses. Nous les formerons directement dans les applications quand ils nous seront utiles.

Remarque. — Une anti-similitude est une transformation involutive, qui coïncide avec sa conjuguée, et dont l'équation fondamentale est:

$$\mathcal{L}^{(2} = - \mathcal{L}^{\mathrm{II}} \, .$$

Quels que soient les vecteurs a et b, on a :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \alpha a \times b$$

et nous pouvons écrire la constante α sous la forme $\overset{2}{\mathcal{T}^{\times}}$, donc :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \overset{2}{\mathcal{T}^{\times}} a \times b \ . \tag{7}$$

On voit immédiatement que :

$$\overset{2}{\mathcal{T}^{\times}} = -\mathcal{T}^{\text{II}} \ . \tag{8}$$

Pour une similitude, au contraire, en définissant $\overset{2}{\mathcal{H}^{\times}}$ par :

$$\mathcal{H}a \times \mathcal{H}b = \overset{2}{\mathcal{H}^{\times}} a \times b \tag{9}$$

on aurait :

$$\overset{2}{\mathcal{H}^{\times}} = \mathcal{H}^{\text{II}} \ . \tag{10}$$

Ces relations (8) et (10) expriment toutes deux que l'homographie considérée est telle que le produit $\mathcal{A}\overline{(\mathcal{A}}$ est un opérateur numérique [1].

Ajoutons, en ce qui concerne les homographies $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ que la relation fondamentale n'est qu'un cas particulier de l'équation :

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{B}(\mathcal{A}\right) - [\mathcal{U}\mathcal{B}]\mathcal{A} - [\mathcal{U}\mathcal{A}]\mathcal{B} + [\mathcal{A}\mathcal{B}]\mathcal{U} = 0 \tag{11}$$

identité entre cinq homographies vectorielles du plan.

Pour les similitudes ou anti-similitudes, on peut remplacer les coefficients de cette équation par des expressions telles que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ défini par :

$$2(\mathcal{A} \times \mathcal{B})a \times b = (\mathcal{A}a \times \mathcal{B}b) + (\mathcal{A}b \times \mathcal{B}a) \ . \tag{12}$$

---

[1] Cf. C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.