Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

Autor: Delens, P.-C.

Kapitel: Chapitre VII. Extension du produit cyclique aux points et segments.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19731

Chapitre VII

Extension du produit cyclique aux points et segments.

Le *produit cyclique* de n segments A, B, ... L sera l'expression :

$$\mathrm{F}_{\smile}^{(n)} = \mathrm{A} \smile \mathrm{B} \smile \dots \smile \mathrm{L} = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(\mathrm{F}^{(n)} \mathbin{)(} j_2^n\big) j_1^n - \big(\mathrm{F}^{(n)} \mathbin{)(} j_1^n\big) j_2^n\Big) \,. \qquad (1)$$

Cette forme vectorielle d'ordre n sera encore appelée l'*orientante* de la forme segmentaire initiale $\mathrm{F}^{(n)}$; la définition s'étendra au cas où la forme $\mathrm{F}^{(n)}$ sera une somme de produits de segments d'ordre n, et nous voyons que l'*orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante*, obtenue en remplaçant chaque segment par son vecteur.

Si nous considérons maintenant une forme ponctuelle $f^{(n)}$, nous appellerons *forme cyclique* correspondante, ou *produit cyclique*, la forme *mixte* :

$$f_{\smile}^{(n)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)} \mathbin{)(} j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)} \mathbin{)(} j_1^n\big) j_2^n\Big) \,. \qquad (2)$$

Une telle forme étant nulle dès qu'on substitue à $f^{(n)}$ une forme contenant $j_1 j_2$ en facteur, il est facile de voir que les formes cycliques d'ordre n dépendent linéairement de $2n - 1$ unités.

C'est ainsi que les formes cycliques du 2e ordre forment un système linéaire à 5 unités, que nous étudierons un peu en détail.

Dans le système ainsi formé, on peut définir un nouveau produit intérieur, ce que nous ferons de la manière suivante. L'expression :

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)} \mathbin{)(} g^{(n)} \mathbin{)(} j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)} \mathbin{)(} g^{(n)} \mathbin{)(} j_1^n\big) j_2^n\Big) \qquad (3)$$

est une fonction linéaire des produits cycliques $f_{\smile}^{(n)}$ comme $g_{\smile}^{(n)}$; on peut la considérer comme un nouveau produit entre ces formes; le *produit intérieur de deux formes cycliques*[1] de même ordre est donc défini par:

$$f^{(n)}_{\smile} \mid g^{(n)}_{\smile} = f^{(n)}_{\smile} \,)(\, g^{(n)} = g^{(n)}_{\smile} \,)(\, f^{(n)} \qquad (4)$$

le produit polaire au second membre ayant le sens de l'expression (3). Il est à remarquer qu'un tel produit n'est ici *pas scalaire*, mais dépend de deux unités; ce produit intérieur sera aussi appelé *l'orientante* des formes $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$, ou $f^{(n)}_{\smile}$ et $g^{(n)}_{\smile}$.

Si $f^{(n)}_{\smile}$ et $g^{(n)}_{\smile}$ sont des puissances cycliques de points, ce qui n'est pas le cas général, on a donc:

$$a^{n}_{\smile} \mid b^{n}_{\smile} = \overline{ab}^{\,n}_{\smile} = \overrightarrow{ab}^{\,n}_{\smile} = (b - a)^{n}_{\smile}$$

ce qui montre l'existence d'un *principe de transfert* analogue à celui que nous avons signalé pour le produit intérieur de cercles.

En ce qui concerne les formes cycliques d'ordre n, nous devons signaler qu'une telle forme peut en général se ramener à un produit cyclique de n éléments, c'est-à-dire qu'on peut résoudre en a, b, c,... l l'équation:

$$f^{(n)}_{\smile} = a \smile b \smile c \ldots l$$

à laquelle on peut substituer l'équivalence:

$$f^{(n)} = abc \ldots l \,. \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

Celle-ci peut à son tour être remplacée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(n)} \,)(\, j_1^n = abc \ldots l \,)(\, j_1^n \\ f^{(n)} \,)(\, j_2^n = ab \ldots l \,)(\, j_2^n \end{array} \right.$$

Or $f^{(n)} \,)(\, j_1^n$ et $f^{(n)} \,)(\, j_2^n$ représentent le système des tangentes menées à la forme $f^{(n)}$ de classe n par les points cycliques j_1 et j_2; ces deux systèmes de tangentes ont en général pour intersections un système de n^2 foyers, et c'est l'ensemble des n foyers réels a, b ... l que nous prendrons de préférence comme solutions.

On pourra encore dire que la forme mixte $f^{(n)}_{\smile}$ caractérise l'ensemble des courbes de classe n homofocales à la forme $f^{(n)}$.

[1] Ce produit n'est du reste pas le seul produit absolu qu'on puisse former entre formes cycliques.

Sauf quand il contient le facteur du 2e ordre $j_1 \smile j_2$ un produit cyclique de points ne s'annulera encore qu'avec l'un de ses facteurs.

Entre deux formes cycliques d'ordres différents, on peut aussi employer le produit intérieur: quand nous aurons besoin de le faire, nous nous ramènerons facilement au cas de deux formes de même ordre.

Nous allons maintenant montrer, au moyen de quelques applications, la simplicité des nouveaux produits définis pour l'expression des théorèmes sur l'orientation de Laguerre et G. Humbert, pour l'étude des propriétés focales des courbes et des coniques en particulier, enfin pour la représentation des covariants des formes binaires sur le plan complexe.

Note *sur la représentation des imaginaires de Laguerre et Darboux.*

Nous avons défini les opérations de la géométrie métrique à partir de celles de la géométrie projective au moyen des vecteurs isotropes:

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v$$

mais on peut rendre ces opérations indépendantes de l'introduction de ces éléments imaginaires si l'on substitue au nombre complexe ι la rotation d'un angle droit représentée par l'opérateur $\mathfrak{J}$. C'est ce principe de représentation géométrique des imaginaires, comme l'on dit, qui a été en géométrie analytique étendu par Laguerre et Darboux à la représentation des points à coordonnées imaginaires: le calcul vectoriel est tout indiqué pour cette adaptation.

Toute équation entre vecteurs où figurent des coefficients imaginaires sera transformée, par le remplacement de ι par $\mathfrak{J}$, en une équation d'autre signification, qui donnera une interprétation de la relation précédente entre vecteurs imaginaires. En outre, nous pourrons donner un sens à un symbole ponctuel:

$$a + \mathfrak{J}b$$

substitué à:

$$a + \iota b$$

point imaginaire de la droite $\overline{ab}$, si toute équation qui contient de tels symboles peut être transformée en une équation vectorielle, c'est-à-dire si on impose la conservation des masses. Ainsi :

$$m' = a + \mathcal{J}b$$

n'aura de sens qu'en donnant à m' la masse $(1 + \mathcal{J})$ et le représentant par le point m tel que :

$$(1 + \mathcal{J})m = a + \mathcal{J}b$$
$$m - a = \mathcal{J}(b - m) .$$

C'est dans ces conditions que deux points imaginaires conjugués, par exemple :

$$m_1 = \frac{a + \iota b}{1 + \iota} \qquad m_2 = \frac{a - \iota b}{1 - \iota}$$

de la droite $\overline{ab}$, sont représentés par leurs *anti-points* réels :

$$m = \frac{a + \mathcal{J}b}{1 + \mathcal{J}} \qquad m' = \frac{a - \mathcal{J}b}{1 - \mathcal{J}} .$$

Les points à coordonnées imaginaires appartenant à un domaine à 4 dimensions, et étant désormais représentés dans le plan à deux dimensions, la position d'un point-image (représentatif d'un point imaginaire), situé par exemple hors d'une droite, ne suffit pas à indiquer si le point imaginaire correspondant appartient à la droite ; au contraire, tout point du plan peut être l'image d'un point imaginaire d'une droite, d'un cercle, d'une courbe quelconque, quand on ne connaît que sa position ; sa masse, par contre, c'est-à-dire un opérateur à deux dimensions de la forme $(\alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{J})$, sera déterminée dès qu'on assujettira le point à être l'image d'un point imaginaire d'une courbe définie ; et aussi par suite l'anti-point conjugué.

Dans les relations cycliques, où l'on utilise l'équation :

$$j_1 \smile j_2 = u\overset{2}{\smile} + v\overset{2}{\smile} = 0$$

qui est aussi l'équation de définition de l'opérateur $\mathcal{J}$ (ou son opposé) :

$$u\overset{2}{\smile} - \mathcal{J}^{(2}(v\overset{2}{\smile} = 0$$

ou bien où l'on se sert d'équivalences suivant le module $(u^2 + v^2)$, toute différence entre les points imaginaires et leurs anti-points disparaît.